

UFUK ÜNİVERSİTESİ · BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİ · GÜZ DÖNEMİ

MAT201 · 3. Hafta

“Her Kuşun Eti Yenmez” Ne Demek?

Açık Önergeler, Niceleyiciler ve Kümeler

Dr. Alaettin Uçan

Rosen, Bölüm 1.4–1.5 ve 2.1–2.2 · MIT 6.042J, Predicate Logic III



3. HAFTA · BUGÜNÜN AKIŞI

Bugün dört bölümde ilerleyeceğiz

1

Açık önermeler ve niceleyiciler

“Her” ve “bazı” ile kurulan cümleler ne zaman doğrudur?

2

Günlük dilden mantığa

Atasözlerini, yönetmelik maddelerini ve şifre kurallarını formül olarak yazmak

3

İç içe niceleyiciler

Bir cümlede birden fazla “her” ya da “bir” varsa sıra neden önemlidir?

4

Kümeler

Kümeler de açık önermelerle tanımlanır.

Sorularınızı istediğiniz an Teams sohbetine yazabilirsiniz.



AÇILIŞ



“Her kuşun eti yenmez.”

Bu atasözünü hepimiz biliyoruz. Peki bu cümle tam olarak ne söylüyor?

Kaynak: TDK Atasözleri ve Deyimler Sözlüğü, “her kuşun eti yenmez” maddesi

AÇILIŞ



Bu soruyu dersin ortasında, bir mantık formülüyle cevaplayacağız.

Önce gerekli araçları kuralım: açık önermeler ve niceleyiciler.



1. BÖLÜM

Açık Önergeler ve Niceleyiciler

İçinde değişken bulunan bir cümle ne zaman doğru, ne zaman yanlış olur?

1. BÖLÜM · AÇIK ÖNERMELER VE NICELEYİCİLER



Geçen hafta önermeleri gördük.

Önerme, doğru ya da yanlış olan bir cümledir.



İki önerme

Ankara Türkiye'nin başkentidir.



Doğru

7 bir çift sayıdır.



Yanlış



Peki “x bir asal sayıdır” cümlesi doğru mu, yanlış mı?



Bu soruyu cevaplayamayız.

Çünkü x 'in hangi sayı olduğunu bilmiyoruz. Cümlemin doğru ya da yanlış olması x 'e bağlı.



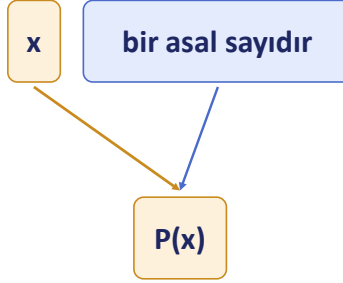
İçinde değişken bulunan ve değişkene bir değer verilince doğru ya da yanlış olan cümleye açık önerme denir.

Bu kavramı lisede “açık önerme” adıyla gördünüz. Rosen'da “yüklem” (predicate) olarak geçer.



Açık önermeye bir isim verelim

TÜRKÇE



MANTIK

$P(x)$: "x bir asal sayıdır."

P harfi açık önermenin adıdır; parantezin içindeki x ise değişkendir.



x yerine bir değer yazınca açık önerme önermeye dönüşür

$P(7)$: 7 bir asal sayıdır.



Doğru

$P(8)$: 8 bir asal sayıdır.



Yanlış



Açık önermeyi önermeye çevirmenin iki yolu vardır.

- 1) Değişkene bir değer vermek: $P(7)$.
- 2) Değişkenin önüne bir niceleyici koymak: “Her x için $P(x)$ ” ya da “Bazı x 'ler için $P(x)$ ”.



Niceleyici, bir açık önermenin kaç eleman için doğru olduğunu söyler.

Türkçedeki karşılıkları: “her”, “bütün”, “bazı”, “en az bir”, “hiçbir”.



Evrensel niceleyici

$$\forall x P(x)$$

“Her x için P(x) doğrudur.”
∀ işareti “her” ya da “bütün” diye okunur.

Kaynak: Rosen, Bölüm 1.4



Varlık niceleyicisi

$$\exists x P(x)$$

“P(x)’i doğru yapan en az bir x vardır.”
∃ işareti “bazı” ya da “en az bir” diye okunur.

Kaynak: Rosen, Bölüm 1.4



Bir niceleyici her zaman bir evrensel küme üzerinde konuşur.

“Her x ” dediğimizde x 'in hangi kümeden seçildiğini de söylemeliyiz: doğal sayılar mı, tam sayılar mı, reel sayılar mı?



Türkçeden mantığa

TÜRKÇE

Bazı

doğal sayılar

asaldır

MANTIK

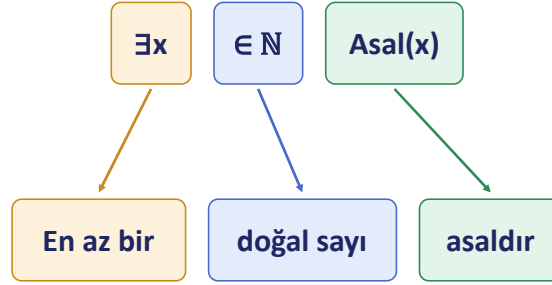
 $\exists x$ $\in \mathbb{N}$ Asal(x) $\exists x \in \mathbb{N}, \text{Asal}(x)$



Mantıktan Türkçeye

MANTIK

TÜRKÇE



“En az bir doğal sayı asaldır.”

Aynı formül “Asal olan bir doğal sayı vardır” diye de okunabilir.



Bu önerme doğrudur.

7 hem bir doğal sayıdır hem de asaldır.

“Bazı” ile başlayan bir iddiayı kanıtlamak için tek bir örnek yeter.



Türkçeden mantığa

TÜRKÇE



MANTIK



$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$$

Kaynak: matbaz.com, 9. Sınıf "Açık Önermeler ve Niceleyiciler" föyü

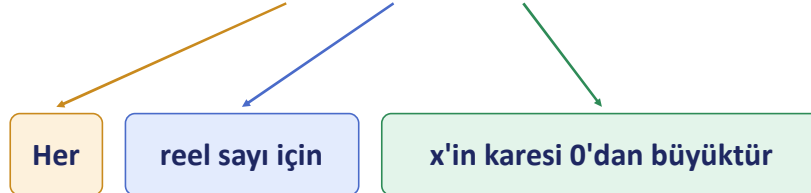


Mantıktan Türkçeye

MANTIK



TÜRKÇE



"Her reel sayı için, o sayının karesi 0'dan büyüktür."



Bu önerme yanlıştır.

$x = 0$ için $0^2 = 0$ olur ve 0, 0'dan büyük değildir.



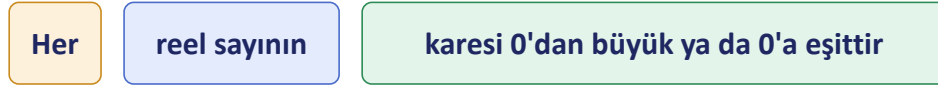
“Her” ile başlayan bir iddiayı çürütmek için tek bir karşı örnek yeter.

Buna karşı örnek denir. Yazılımda kırmızıya dönen her test, aslında bir karşı örnektir.



Önermeyi düzeltelim

TÜRKÇE



MANTIK



$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0 \rightarrow \text{Doğru}$$


Mantıktan Türkçeye

MANTIK



TÜRKÇE



“Hiçbir reel sayının karesi negatif değildir.”

Aynı formülü Türkçede farklı cümlelerle okuyabiliriz; önemli olan anlamın değişmemesidir.



Aynı açık önerme, evrensel küme değişince farklı sonuç verebilir.



Aynı ifade, iki farklı evrensel küme

Pozitif tam sayılarda: Doğru

$$\forall x \in \mathbb{Z}^+, x^2 \geq x$$

x en az 1 olduğu için $x^2 = x \cdot x \geq x$ olur.

Reel sayılarda: Yanlış

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq x$$

Karşı örnek: $x = 1/2$ için $x^2 = 1/4$ olur ve $1/4, 1/2$ 'den küçüktür.

Bir niceleyiciyi okurken önce evrensel kümeye bakın.



Evrensel küme sonluysa, “her” uzun bir “ve” zinciridir.



Evrensel küme: {1, 2, 3}

$$\forall x P(x) \equiv P(1) \wedge P(2) \wedge P(3)$$

“Her x için P(x)” demek, “P(1) ve P(2) ve P(3)” demektir.



“Bazı” ise uzun bir “veya” zinciridir.



Evrensel küme: {1, 2, 3}

$$\exists x P(x) \equiv P(1) \vee P(2) \vee P(3)$$

“Bazı x'ler için $P(x)$ ” demek, “ $P(1)$ veya $P(2)$ veya $P(3)$ ” demektir.

Örnek: $P(x): x^2 < 3$ ise $P(1)$ doğru, $P(2)$ ve $P(3)$ yanlıştır. Doğru $\vee$ Yanlış $\vee$ Yanlış = Doğru.



Bu iki zincir, Python'daki all ve any fonksiyonlarıdır

```
quantifiers.py

domain = [1, 2, 3]

# for all x: p(x)    ->  p(1) and p(2) and p(3)
all(p(x) for x in domain)

# exists x: p(x)    ->  p(1) or p(2) or p(3)
any(p(x) for x in domain)
```

all, ilk yanlış bulunca durur; any, ilk doğruyu bulunca durur.



Evrensel küme boşsa ne olur?



Evrensel küme boşa “her” ile başlayan bir iddia her zaman doğrudur.

Çünkü bu iddiayı çürütecek bir karşı örnek bulunamaz.

Kaynak: Rosen, Bölüm 1.4



“Bu sınıftaki bütün zürafalar mavidir.”

Sınıfta hiç zürafa yoksa bu cümleyi çürütemezsiniz; mavi olmayan bir zürafa gösteremezsiniz.



Evrensel küme boşsa “bazı” ile başlayan bir iddia her zaman yanlıştır.

Gösterebileceğimiz tek bir örnek bile yoktur.
Python'da `all([])` True, `any([])` ise False döndürür.



Bir niceleyici daha: “bir ve yalnız bir”

TÜRKÇE

 $x - 1 = 0$ denkleminin

bir ve yalnız bir

reel

çözümü vardır

MANTIK

 $\exists!x$ $\in \mathbb{R}$ $x - 1 = 0$
 $\exists!x \in \mathbb{R}, x - 1 = 0 \rightarrow$ Doğru: tek çözüm $x = 1$



Bir programın doğru çalıştığını söylemek de bir “her” cümlesidir.

Kaynak: Rosen, Bölüm 1.4, “Ön Koşullar ve Son Koşullar”



İki değişkenin değerini takas eden program

```
swap.py  
  
# swap the values of x and y  
temp = x  
x = y  
y = temp
```

Ön koşul

Program başlarken: $x = a$ ve $y = b$

Son koşul

Program bittiğinde: $x = b$ ve $y = a$

Kaynak: Rosen, Bölüm 1.4



“Program doğru çalışıyor” cümlesinin formülü

TÜRKÇE

Ön koşulu sağlayan

her girdi için

program bittiğinde son koşul sağlanır

MANTIK

 $\forall g$ $\text{Ön}(g)$ $\rightarrow$

yazılı değil

 $\text{Son}(g)$ $\forall g (\text{Ön}(g) \rightarrow \text{Son}(g))$

Türkçede “ise” sözcüğü yazılmasa da “sağlayan ... için” kalıbı bir koşul bildirir.



Şimdi niceleyicili cümlelerin değilini alalım.



Türkçeden mantığa

TÜRKÇE



MANTIK

$$\forall g \in \text{Günler}, \text{Doğar}(g)$$

Kaynak: eokultv, 9. Sınıf "Her ve Bazı Niceleyicileri" konu anlatımı



Aynı kaynakta bu önermenin değil şöyle yazılmış

TÜRKÇE



MANTIK

$$\exists g \in \text{Günler}, \neg \text{Doğar}(g)$$

Kaynak: eokultv, 9. Sınıf "Her ve Bazı Niceleyicileri" konu anlatımı



Değilleme kuralı (1)

$$\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$$

“Her x için P(x)” doğru değilse,
P(x)'in yanlış olduğu en az bir x vardır.

Kaynak: Rosen, Bölüm 1.4, niceleyiciler için De Morgan kuralları



Değilleme kuralı (2)

$$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$$

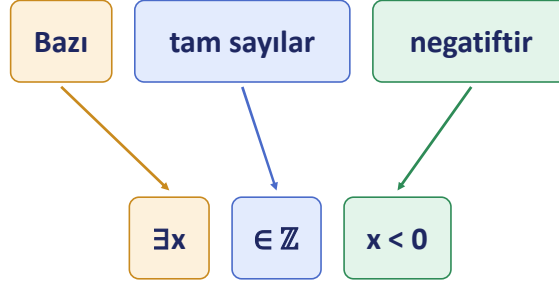
P(x)'i doğru yapan hiçbir x yoksa,
her x için P(x) yanlıştır.

Kaynak: Rosen, Bölüm 1.4, niceleyiciler için De Morgan kuralları



Türkçeden mantığa

TÜRKÇE



MANTIK

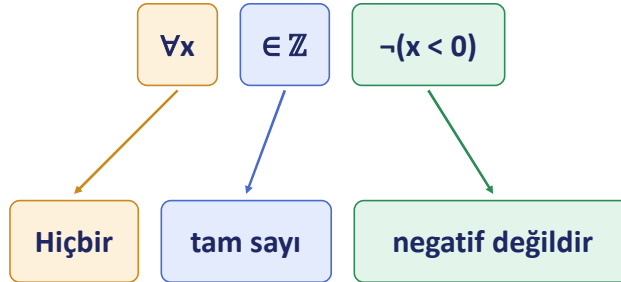
$$\exists x \in \mathbb{Z}, x < 0$$

Kaynak: eokultv, 9. Sınıf "Her ve Bazı Niceleyicileri" konu anlatımı



Değilini alalım

MANTIK



TÜRKÇE

"Hiçbir tam sayı negatif değildir."

$\neg \exists x (x < 0) \equiv \forall x \neg (x < 0)$. Bu cümleye 2. bölümde, lise kaynağının yazdığı biçimiyle geri döneceğiz.



Bu kurallar nereden geliyor?

“Her” uzun bir “ve” zinciri, “bazı” uzun bir “veya” zinciridir. Geçen haftaki De Morgan kuralını bu zincirlere uygulayın.



Evrensel küme {1, 2, 3} iken

$$\neg \forall x P(x)$$

Başlangıç



$$\neg (P(1) \wedge P(2) \wedge P(3))$$

“Her” bir “ve” zinciridir



$$\neg P(1) \vee \neg P(2) \vee \neg P(3)$$

Geçen haftanın De Morgan kuralı



$$\exists x \neg P(x)$$

“Veya” zinciri bir “bazı”dır



Değilleme yaparken sık yapılan bir hata



Türkçeden mantığa

TÜRKÇE

Sınıftaki

herkes

ödevini teslim etti

MANTIK

 $\forall \text{ö}$ $\in \text{Sınıf}$

Teslim(ö)

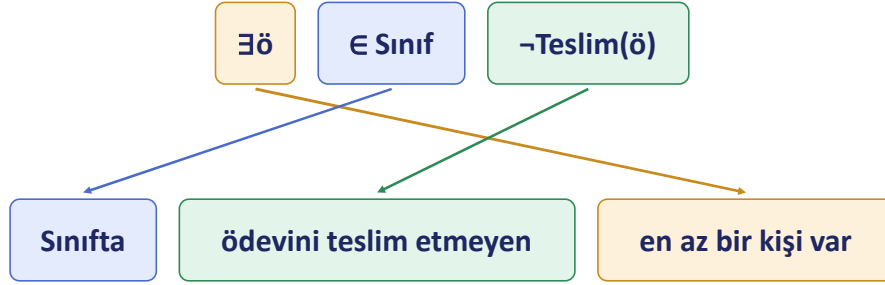
 $\forall \text{ö} \in \text{Sınıf}, \text{Teslim}(\text{ö})$



Bu cümlenin değili

MANTIK

TÜRKÇE



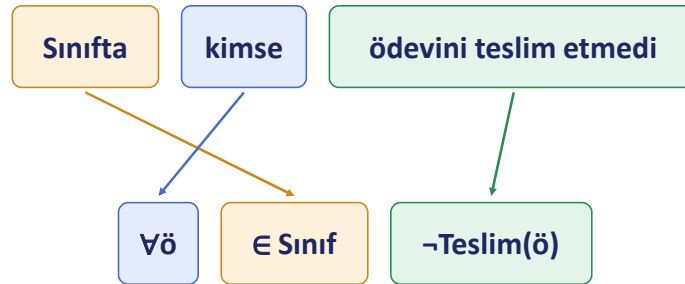
"Sınıfta ödevini teslim etmeyen en az bir kişi var."



Bu cümle ise değil değildir

TÜRKÇE

MANTIK



"Kimse teslim etmedi" çok daha güçlü bir iddiadır; ilk cümlenin değili değildir.



2. BÖLÜM

Günlük Dilden Mantığa

Atasözleri, yönetmelik maddeleri ve şifre kuralları nasıl formüle dökülür?

2. BÖLÜM · GÜNLÜK DILDEN MANTIĞA



“Her kuşun eti yenmez.”

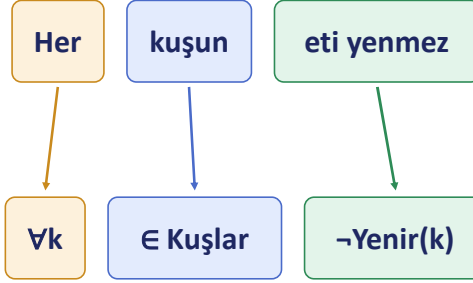
Şimdi bu atasözünü formüle dökebiliriz. Önce kelimesi kelimesine çevirelim.

Kaynak: TDK Atasözleri ve Deyimler Sözlüğü, “her kuşun eti yenmez” maddesi



Kelimesi kelimesine çeviri

TÜRKÇE



MANTIK

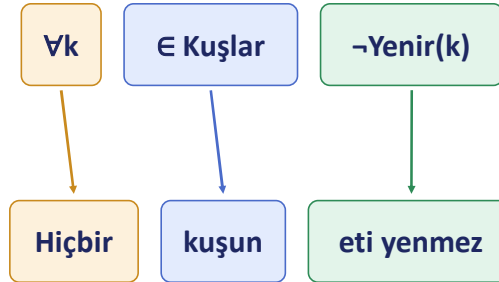
$$\forall k \in \text{Kuşlar}, \neg \text{Yenir}(k)$$

Kaynak: TDK Atasözleri ve Deyimler Sözlüğü, "her kuşun eti yenmez" maddesi



Bu formülü geri okuyalım

MANTIK



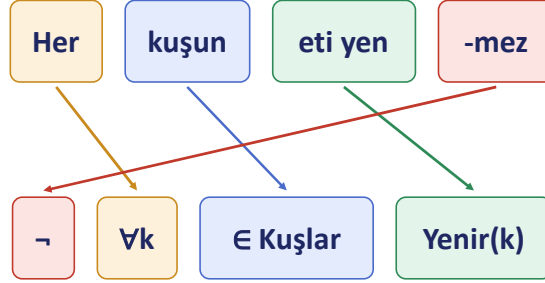
TÜRKÇE

"Hiçbir kuşun eti yenmez." Oysa tavuğun da hindinin de eti yenir.



Atasözünün anlattığı

TÜRKÇE



MANTIK

$$\neg \forall k \in \text{Kuşlar}, \text{Yenir}(k)$$

Olumsuzluk eki cümlelerin en sonunda, ama formülde en başa gidiyor.

Kaynak: TDK Atasözleri ve Deyimler Sözlüğü, "her kuşun eti yenmez" maddesi



Bu formülü geri okuyalım

MANTIK



TÜRKÇE

"Her kuşun etinin yendiği doğru değildir."



Değilleme kuralını uygulayalım

$$\neg \forall k \text{ Yenir}(k) \equiv \exists k \neg \text{Yenir}(k)$$

“Eti yenmeyen en az bir kuş vardır.”



TDK da atasözünü tam olarak böyle açıklıyor.

“Herkes zorbalığa boyun eğmez, buna karşı gelecekler de çıkar.”

Kaynak: TDK Atasözleri ve Deyimler Sözlüğü, “her kuşun eti yenmez” maddesi



TDK açıklamasının ilk yarısı

TÜRKÇE

Herkes

zorbalığa boyun eğ

-mez

MANTIK

¬

∀x

BoyunEğer(x)

$$\neg \forall x \text{ BoyunEğer}(x)$$

Kaynak: TDK Atasözleri ve Deyimler Sözlüğü, "her kuşun eti yenmez" maddesi



TDK açıklamasının ikinci yarısı

TÜRKÇE

buna karşı gelecekler

de çıkar

MANTIK

∃x

¬BoyunEğer(x)

$$\exists x \neg \text{BoyunEğer}(x)$$

Kaynak: TDK Atasözleri ve Deyimler Sözlüğü, "her kuşun eti yenmez" maddesi



Sözlük, değilleme kuralını kendi cümlesiyle uyguluyor

$$\neg \forall x \text{ BoyunEğer}(x) \equiv \exists x \neg \text{BoyunEğer}(x)$$

“Herkes zorbalığa boyun eğmez” $\equiv$ “buna karşı gelecekler de çıkar”

Kaynak: TDK Atasözleri ve Deyimler Sözlüğü, “her kuşun eti yenmez” maddesi



Ama Türkçede “her ... değil” kalıbı her zaman bu kadar açık değildir.



Bir lise kaynağında “Bazı tam sayılar negatiftir” önermesinin değil şöyle yazılmış:

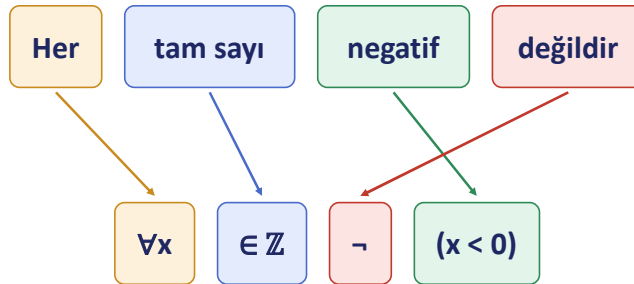
“Her tam sayı negatif değildir.”

Kaynak: eokultv, 9. Sınıf “Her ve Bazı Niceleyicileri” konu anlatımı



Birinci okuma: kaynağın kastettiği

TÜRKÇE



MANTIK

$\forall x \in \mathbb{Z}, \neg(x < 0) = \text{“Hiçbir tam sayı negatif değildir.”}$

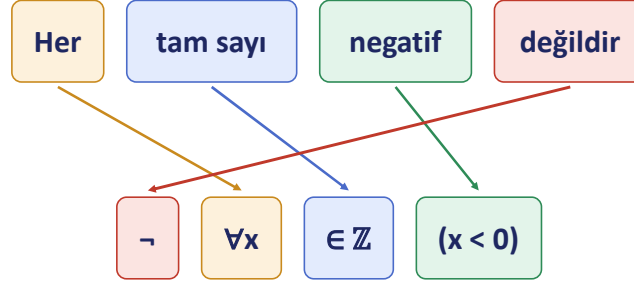
Kaynak: eokultv, 9. Sınıf “Her ve Bazı Niceleyicileri” konu anlatımı



İkinci okuma: günlük Türkçedeki anlamı

TÜRKÇE

MANTIK



$\neg \forall x \in \mathbb{Z}, (x < 0)$ = “Tam sayıların hepsi negatif değildir.”

“Her kuşun eti yenmez” atasözünde olduğu gibi, günlük Türkçede bu okuma daha yaygındır.



“Hiçbiri” demek istiyorsanız “hiçbir” sözcüğünü kullanın.

“Hiçbir tam sayı negatif değildir” cümlesi yalnızca tek türlü okunabilir.



Türkçede “her” sözcüğü her zaman yazılmaz.

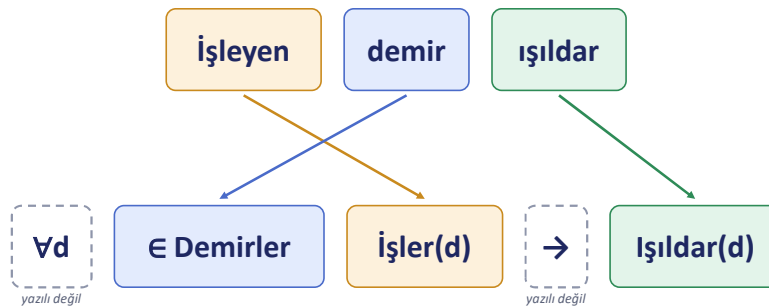
Birçok atasözü, “her” sözcüğü hiç geçmediği hâlde bir “her” cümlesidir.



Türkçeden mantığa

TÜRKÇE

MANTIK



$\forall d \in \text{Demirler}, (\text{İşler}(d) \rightarrow \text{İşıldar}(d))$

Ne “her” ne de “ise” yazılı; ama ikisi de cümlenin anlamında var.

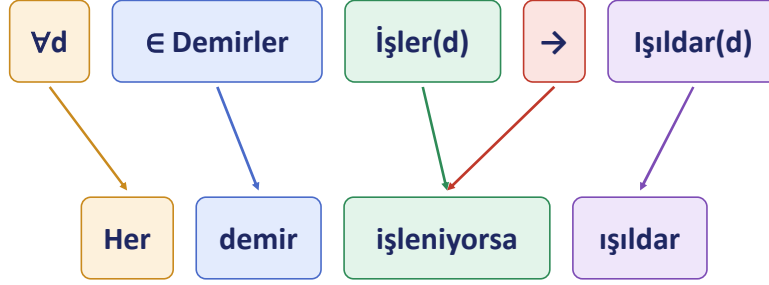
Kaynak: TDK Atasözleri ve Deyimler Sözlüğü, “işleyen demir ışıldar / pas tutmaz” maddesi



Mantıktan Türkçeye

MANTIK

TÜRKÇE



“Her demir, işleniyorsa ııldar.”

TDK açıklaması: Sürekli çalışan kişi yeteneğini kaybetmez, gelişir.

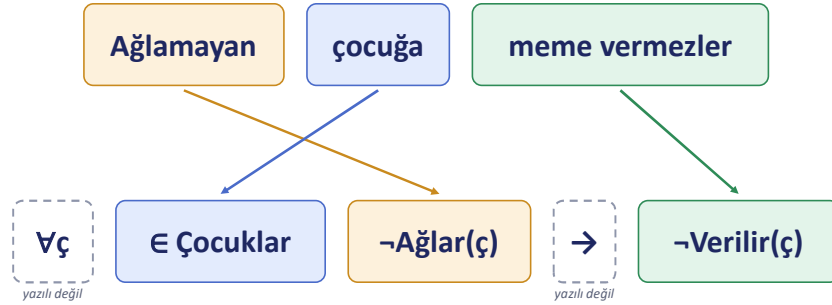
Kaynak: TDK Atasözleri ve Deyimler Sözlüğü, “işleyen demir ııldar / pas tutmaz” maddesi



Türkçeden mantığa

TÜRKÇE

MANTIK



$\forall \text{ç} (\neg \text{Ağlar}(\text{ç}) \rightarrow \neg \text{Verilir}(\text{ç}))$

TDK açıklaması: “Hakkını aramasını bilmeyen kimsenin işi görülmez.”

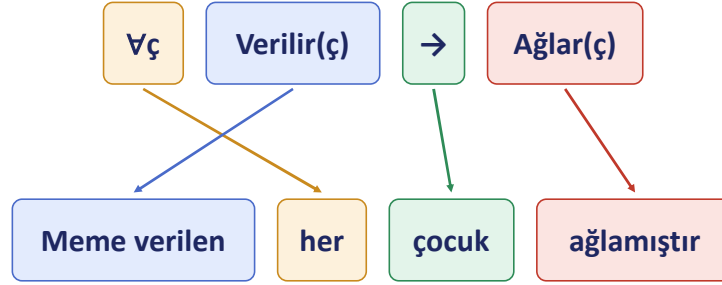
Kaynak: TDK Atasözleri ve Deyimler Sözlüğü, “ağlamayan çocuğa meme vermezler” maddesi



Geçen haftanın karşıt tersi burada da geçerli

MANTIK

TÜRKÇE



“Meme verilen her çocuk ağlamıştır.” Bu cümle atasözüyle denktir.



Şimdi kendi yönetmeliğimize bakalım.

Resmî metinler de niceleyicilerle doludur; çoğu zaman “her” sözcüğü yine yazılı değildir.



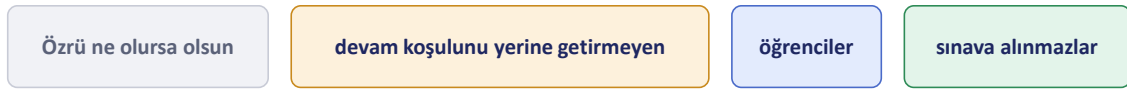
“Özrü ne olursa olsun devam koşulunu yerine getirmeyen öğrenciler sınava alınmazlar.”

Kaynak: Ufuk Üniversitesi Önlisans ve Lisans Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği, Madde 26

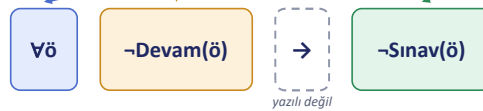


Türkçeden mantığa

TÜRKÇE



MANTIK



$\forall \text{ö} (\neg \text{Devam}(\text{ö}) \rightarrow \neg \text{Sınav}(\text{ö}))$

Çoğul “öğrenciler” burada “her öğrenci” anlamındadır. Gri kutuya 3. bölümde döneceğiz.

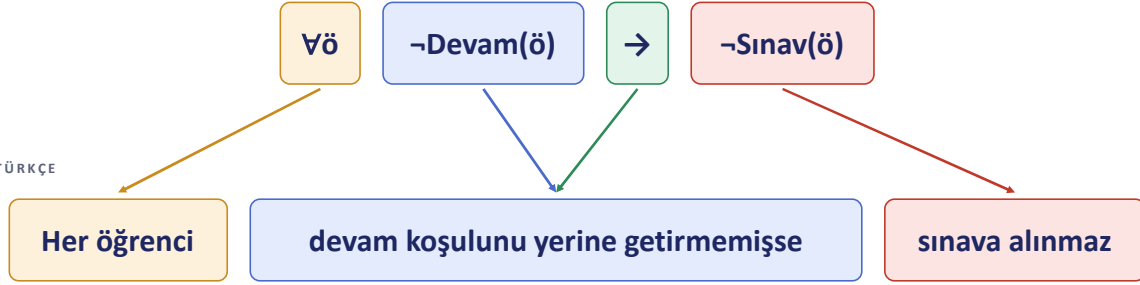
Kaynak: Ufuk Üniversitesi Önlisans ve Lisans Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği, Madde 26



Mantıktan Türkçeye

MANTIK

TÜRKÇE



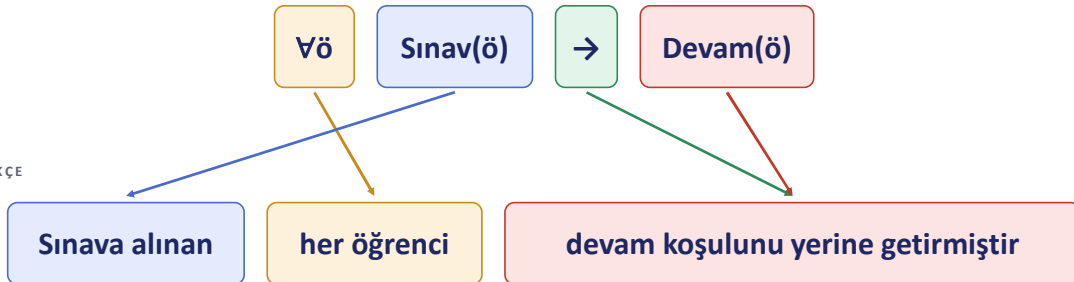
“Her öğrenci, devam koşulunu yerine getirmemişse sınava alınmaz.”



Aynı kuralın karşıt tersi

MANTIK

TÜRKÇE



“Sınava alınan her öğrenci devam koşulunu yerine getirmiştir.”



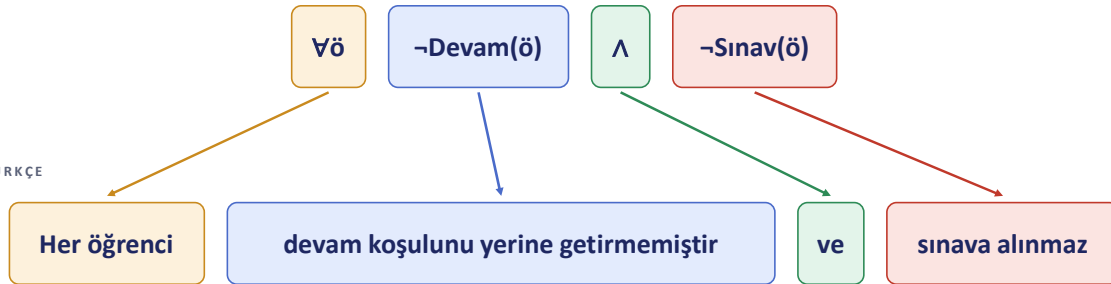
Bu formülü $\rightarrow$ yerine $\wedge$ ile yazarsak ne olur?



Yanlış formül

MANTIK

TÜRKÇE



Bu formül, bütün öğrencilerin devamsız olduğunu söylüyor. Yönetmelik böyle bir şey söylemiyor.



Pratik kural: “her” ile genellikle → kullanılır.

Kaynak: Rosen, Bölüm 1.4, “Günlük Dildeki Cümlelerin Çevrilmesi”



Bir de e-Devlet'in şifre kurallarına bakalım.

Her gün kullandığınız bir sistemin gerçek kuralları.

Kaynak: e-Devlet Hızlı Çözüm Merkezi, şifre kuralları



“Yeni şifreniz en az bir küçük harf (a..z), en az bir büyük harf (A..Z), en az bir rakam (0..9) ve en az bir sembolden oluşmalıdır.”

Kaynak: e-Devlet Hızlı Çözüm Merkezi, şifre kuralları



Kuralın rakamla ilgili kısmı

TÜRKÇE



MANTIK



$$\exists k (k \in \text{ş} \wedge \text{Rakam}(k))$$

ş: yeni şifre, k: şifredeki bir karakter.

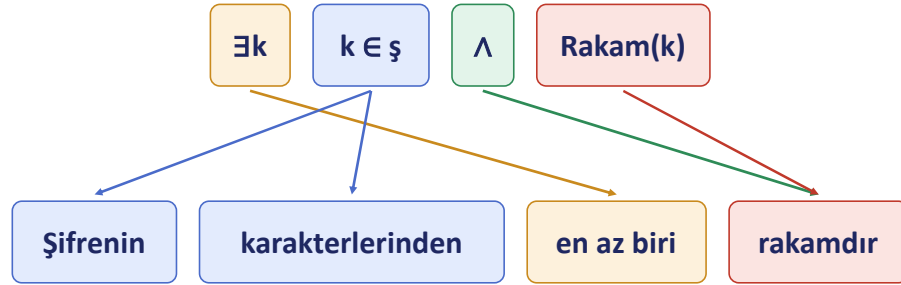
Kaynak: e-Devlet Hızlı Çözüm Merkezi, şifre kuralları (kuralın rakamla ilgili kısmı)



Mantıktan Türkçeye

MANTIK

TÜRKÇE



"Şifrenin karakterlerinden en az biri rakamdır."



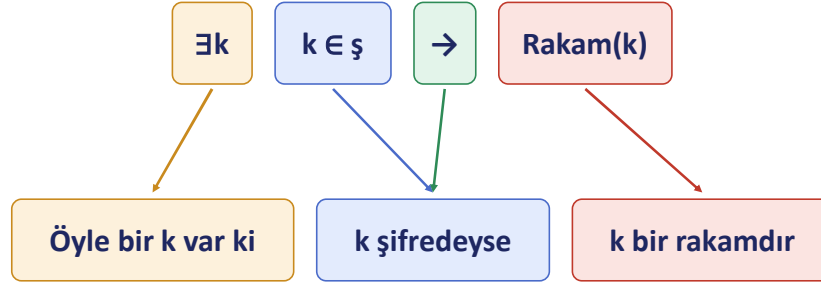
Bu formülü $\wedge$ yerine $\rightarrow$ ile yazarsak ne olur?



Yanlış formül

MANTIK

TÜRKÇE



Şifrede olmayan herhangi bir karakter bu formülü doğru yapar. Kural hiçbir şey denetlemez.



Pratik kural: “bazı” ile genellikle $\wedge$ kullanılır.

Kısaca: $\forall$ ile $\rightarrow$, $\exists$ ile $\wedge$.



“Yeni şifreniz en son kullandığınız üç şifreden farklı olmalıdır.”

Kaynak: e-Devlet Hızlı Çözüm Merkezi, şifre kuralları



Türkçeden mantığa

TÜRKÇE



MANTIK



$$\forall e (e \in \text{SonÜç} \rightarrow \text{ş} \neq e)$$

Gizli “her”: yeni şifre, son üç şifrenin her birinden farklı olmalıdır.

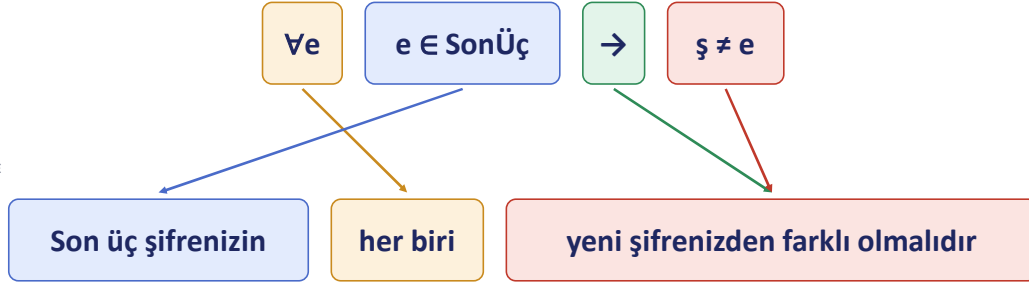
Kaynak: e-Devlet Hızlı Çözüm Merkezi, şifre kuralları



Mantıktan Türkçeye

MANTIK

TÜRKÇE



“Son üç şifrenizin her biri yeni şifrenizden farklı olmalıdır.”



Kurallar formül olunca, programın ne yapacağı da netleşir

password_check.py

```
def is_valid(password, last_three):
    # exists: at least one digit
    has_digit = any(ch.isdigit() for ch in password)

    # for all: different from each of the last three
    is_new = all(password != old for old in last_three)

    return len(password) >= 8 and has_digit and is_new
```

$\exists$ için any, $\forall$ için all: formüldeki her niceleyici koddaki bir döngüye dönüşüyor.



Niceleyicilerle akıl yürütme: yönetmelikten bir çıkarım

Kaynak: Ufuk Üniversitesi Önlisans ve Lisans Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği, Madde 37



“Devamsızlık nedeni ile yıl sonu sınavına giremeyen öğrenci bütünleme sınavına giremez.”

Kaynak: Ufuk Üniversitesi Önlisans ve Lisans Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği, Madde 37



Türkçeden mantığa

TÜRKÇE

Devamsızlık nedeni ile yıl sonu sınavına giremeyen

öğrenci

bütünleme sınavına giremez

MANTIK

 $\forall \ddot{o}$ $D(\ddot{o})$ $\rightarrow$ $\neg B(\ddot{o})$

yazılı değil

 $\forall \ddot{o} (D(\ddot{o}) \rightarrow \neg B(\ddot{o}))$ *D(ö): ö devamsızlık nedeniyle yıl sonu sınavına giremedi. B(ö): ö bütünleme sınavına girebilir.*

Kaynak: Ufuk Üniversitesi Önlisans ve Lisans Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği, Madde 37



Kuraldan belirli bir kişiye

 $\forall \ddot{o} (D(\ddot{o}) \rightarrow \neg B(\ddot{o}))$

Yönetmelik, Madde 37

 $D(\text{Ayşe})$

Ayşe devamsızlık nedeniyle yıl sonu sınavına giremedi.

 $\neg B(\text{Ayşe})$

O hâlde Ayşe bütünlemeye giremez.

Genel bir kural, belirli bir kişiye uygulandı.

Kaynak: Ufuk Üniversitesi Önlisans ve Lisans Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği, Madde 37



Bu çıkarım kalıbına evrensel modus ponens denir.

“Bütün insanlar ölümlüdür. Sokrates bir insandır. O hâlde Sokrates ölümlüdür.” çıkarımıyla aynı kalıptır.

Kaynak: Rosen, Bölüm 1.6



Açık önermelerle program da yazılabilir.

Prolog dilinde program, gerçekler ve kurallardan oluşur; ikisi de birer açık önermedir.

Kaynak: Rosen, Bölüm 1.4, “Mantık Programlama”

2. BÖLÜM · GÜNLÜK DILDEN MANTIĞA



Küçük bir Prolog programı

```

university.pl

% facts
instructor(uçan, mat201).
instructor(kaya, fiz101).
enrolled(ayse, mat201).
enrolled(mehmet, fiz101).

% rule
teaches(P, S) :- instructor(P, C), enrolled(S, C).

?- teaches(P, ayse).      % P = uçan

```

Gerçek

Değişken içermeyen, doğru kabul edilen bir önerme.

Kural

P, S'nin aldığı bir dersi veriyorsa doğru olan bir açık önerme.

Sorgu

"Ayşe'ye ders veren biri var mı, varsa kim?" Yani bir $\exists$ sorusu.

Kaynak: Rosen, Bölüm 1.4 (isimler derse uyarlandı)

3. BÖLÜM



İç İçe Niceleyiciler

Bir cümlede birden fazla niceleyici varsa sıraları neden önemlidir?



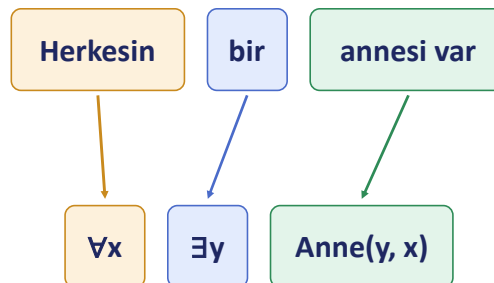
“Herkesin bir annesi var.”

“Herkesin annesi olan biri var.”
Bu iki cümle aynı şeyi mi söylüyor?



Birinci cümle

TÜRKÇE



MANTIK

$$\forall x \exists y \text{ Anne}(y, x) \rightarrow \text{Doğru}$$

Anne(y, x): y, x'in annesidir.



İkinci cümle

TÜRKÇE



MANTIK



$\exists y \forall x Anne(y, x) \rightarrow \text{Yanlış}$



Formülü geri okuyalım

MANTIK



TÜRKÇE



“Öyle biri var ki herkesin annesidir.”



Niceleyicilerin sırası değişince cümlenin anlamı da değişir.



Rosen'a göre iç içe niceleyicileri anlamanın en kolay yolu, onları iç içe döngüler gibi düşünmektir.



Dıştaki niceleyici, dış döngüdür

```
nested.py

# for all x, there exists y such that p(x, y)
all(any(p(x, y) for y in ys) for x in xs)

# there exists y such that for all x, p(x, y)
any(all(p(x, y) for x in xs) for y in ys)
```

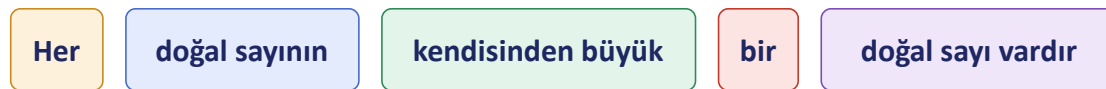
İki döngünün yerini değiştirirseniz program başka bir şey hesaplar.

Kaynak: Rosen, Bölüm 1.5

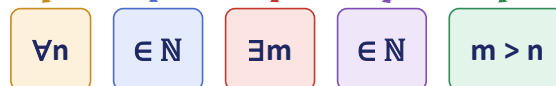


Türkçeden mantığa

TÜRKÇE



MANTIK

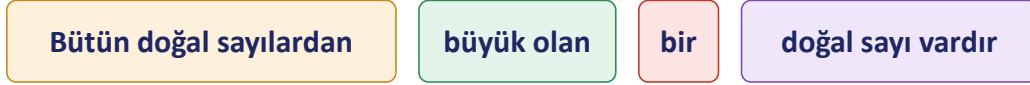


$\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}, m > n \rightarrow$ Doğru: $m = n + 1$ seçilir



Türkçeden mantığa

TÜRKÇE



MANTIK



$\exists m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, m > n \rightarrow$ Yanlış: en büyük doğal sayı yoktur



Dikkat: “Her doğal sayıdan büyük bir doğal sayı vardır” cümlesi iki türlü okunabilir.

“Her doğal sayı için ondan büyük bir sayı vardır” ($\forall \exists$) mı, yoksa “bütün doğal sayılardan büyük tek bir sayı vardır” ($\exists \forall$) mı? Türkçede iki anlam da mümkün.



Aynı türden niceleyiciler yer değiştirebilir; farklı türden olanlar değiştiremez.

$\forall x \forall y \equiv \forall y \forall x$ ve $\exists x \exists y \equiv \exists y \exists x$.
Ama $\forall x \exists y$ ile $\exists y \forall x$ farklıdır.

Kaynak: Rosen, Bölüm 1.5



Atasözlerimiz de niceleyici sırasını bilir.



Türkçeden mantığa

TÜRKÇE

Her yiğidin

bir

yoğurt yiyişi vardır

MANTIK

 $\forall k$ $\exists y$ $Yiyiş(k, y)$ $\forall k \exists y Yiyiş(k, y)$ *$Yiyiş(k, y)$: y , k kişinin yoğurt yeme biçimidir.**Kaynak: TDK Atasözleri ve Deyimler Sözlüğü, "her yiğidin bir yoğurt yiyişi vardır" maddesi*

TDK'nin açıklaması formülün okunuşuyla örtüşüyor

MANTIK

 $\forall k$ $\exists y$ $Yiyiş(k, y)$

TÜRKÇE

Herkesin

kendine özgü bir

iş yapma biçimi vardır

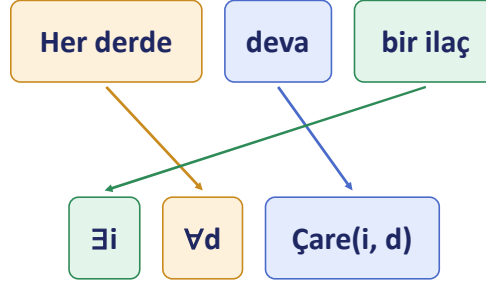
"Herkesin kendine özgü bir çalışma yöntemi, bir iş yapma biçimi vardır."

Kaynak: TDK Atasözleri ve Deyimler Sözlüğü, "her yiğidin bir yoğurt yiyişi vardır" maddesi



Türkçeden mantığa

TÜRKÇE



MANTIK

$$\exists i \forall d \text{ Çare}(i, d)$$

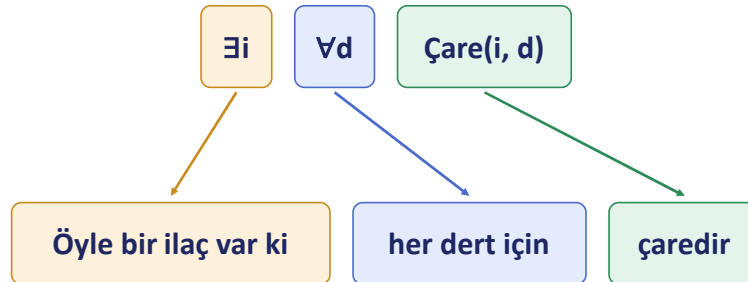
TDK: "her derde deva olmak", birçok şeye çare olmak demektir.

Kaynak: TDK Güncel Türkçe Sözlük, "her derde deva olmak" deyimini



Mantıktan Türkçeye

MANTIK



TÜRKÇE

"Öyle bir ilaç var ki bütün dertlere çaredir."



Cümledeki sözcük sırası ile formüldeki niceleyici sırası aynı olmak zorunda değildir.

MIT videosunun asıl dersi de buydu: günlük dilden formüle çeviri mekanik yapılamaz; her cümlede anlamı düşünmek gerekir.

Kaynak: MIT 6.042J (2015), Predicate Logic III videosu



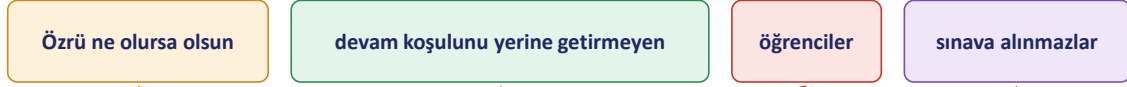
Yönetmelikteki gri kutuya dönelim: “Özrü ne olursa olsun”

Kaynak: Ufuk Üniversitesi Önlisans ve Lisans Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği, Madde 26



İkinci bir gizli “her”

TÜRKÇE



MANTIK



$$\forall \ddot{o} \forall z (\ddot{O}z\ddot{u}r(\ddot{o}, z) \wedge \neg Devam(\ddot{o}) \rightarrow \neg Sınav(\ddot{o}))$$

“Ne olursa olsun” ifadesi, özürlerin hiçbirinin bir istisna oluşturmadığını söyleyen bir $\forall$ ’dir.

Kaynak: Ufuk Üniversitesi Önlisans ve Lisans Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği, Madde 26



Türkçeden mantığa

TÜRKÇE



MANTIK



$$\forall \ddot{o} \exists ! n Numara(\ddot{o}, n)$$



“Bir ve yalnız bir” aslında iki parçadır

MANTIK



TÜRKÇE



“Öğrencinin en az bir numarası vardır ve ondan başka numarası yoktur.”

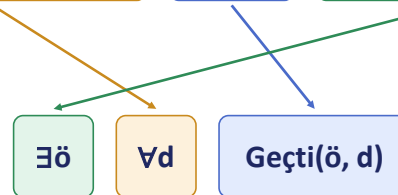


Türkçeden mantığa

TÜRKÇE



MANTIK

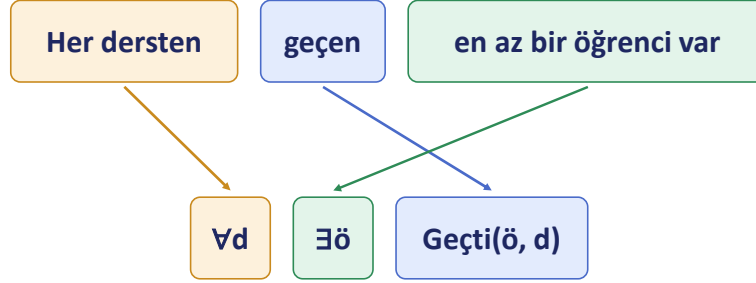


$\exists \ddot{o} \forall d \text{ Geçti}(\ddot{o}, d)$



Sırayı değiştirelim

TÜRKÇE



MANTIK

 $\forall d \exists \ddot{o} \text{ Geçti}(\ddot{o}, d)$


İkinci cümle, birincisinden çok daha zayıf bir iddiadır.

Bütün derslerden geçen bir öğrenci varsa, her dersten geçen biri de vardır. Ama tersi doğru olmayabilir.



“Bütün derslerden geçen bir öğrenci var” cümlesinin değili

 $\neg \exists \bar{o} \forall d \text{ Geçti}(\bar{o}, d)$

Başlangıç


 $\forall \bar{o} \neg \forall d \text{ Geçti}(\bar{o}, d)$
 $\neg \exists$ yerine $\forall$ 
 $\forall \bar{o} \exists d \neg \text{Geçti}(\bar{o}, d)$
 $\neg \forall$ yerine $\exists$ 

Sonucu Türkçe okuyalım

MANTIK

 $\forall \bar{o}$ $\exists d$ $\neg \text{Geçti}(\bar{o}, d)$

TÜRKÇE

Her öğrencinin

kaldığı

en az bir ders var

“Her öğrencinin kaldığı en az bir ders var.”



Son bir soru: doğru olan her formül ispatlanabilir mi?

Kaynak: MIT 6.042I (2015), Predicate Logic III videosu



İyi haber: Gödel'in tamlık teoremi

Az sayıda aksiyom ve iki çıkarım kuralıyla, her durumda doğru olan bütün formüller ispatlanabilir. Kuramsal olarak çok güçlü bir sonuçtur; ama pratikte bu yolla ispat yapmak son derece zahmetlidir.

Kaynak: MIT 6.042I (2015), Predicate Logic III videosu



Kötü haber: Bir formülün her durumda doğru olup olmadığına karar veren genel bir algoritma yoktur.

Önergeler mantığında doğruluk tablosu her zaman bir cevap verir. Niceleyiciler için içine girince bu imkân ortadan kalkar.

Kaynak: MIT 6.042J (2015), Predicate Logic III videosu



Bir bilgisayar mühendisi için bu temel bir sınırdır.

Her soruyu cevaplayan bir algoritma yazmak her zaman mümkün değildir.



4. BÖLÜM

Kümeler

Bir açık önermenin doğruluk kümesi, o önermeyi doğru yapan elemanlardan oluşur.

4. BÖLÜM • KÜMELER



Lisede açık önermelerin doğruluk kümesini gördünüz.

Doğruluk kümesi, açık önermeyi doğru yapan elemanların kümesidir. Rosen 2.1 de aynı kavramı kullanır.

Kaynak: Rosen, Bölüm 2.1



Türkçeden kümeye

TÜRKÇE

10'dan küçük

asal

doğal sayılar

MANTIK

 $\{x \in \mathbb{N}$ $| x < 10$ $\wedge \text{Asal}(x) \}$

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x < 10 \wedge \text{Asal}(x)\} = \{2, 3, 5, 7\}$$



Bir kümeyi iki şekilde yazabiliriz.

Liste yöntemi: Bütün elemanlar tek tek yazılır.

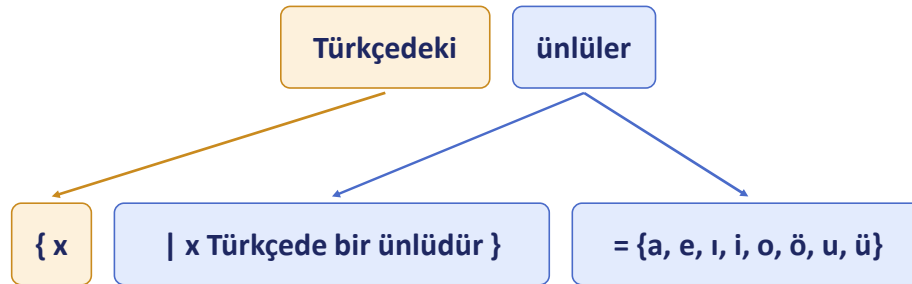
Ortak özellik yöntemi: Elemanların sağladığı açık önerme yazılır.



Aynı küme, iki yazılış

TÜRKÇE

MANTIK



Ortak özellik yöntemi = Liste yöntemi



$$\{a, e, ı\} = \{ı, a, e\} = \{a, a, e, ı\}$$

Kümeye sıra ve tekrar önemli değildir.



$\emptyset$ ile $\{\emptyset\}$ aynı küme değildir.

$\emptyset$ boş bir kutudur. $\{\emptyset\}$ ise içinde boş bir kutu bulunan bir kutudur; bir elemanı vardır.

Kaynak: Rosen, Bölüm 2.1



$|\{a, e, ı, i, o, ö, u, ü\}| = 8$

Bir kümenin eleman sayısı dikey çizgilerle gösterilir. Python'daki karşılığı len fonksiyonudur.

Kaynak: Rosen, Bölüm 2.1



Alt küme de bir “her” cümlesidir.



Türkçeden mantığa

TÜRKÇE



MANTIK



$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$$

4. BÖLÜM · KÜMELER



Bir örnek

TÜRKÇE

Kalın ünlüler

ünlülerin

bir alt kümesidir

MANTIK

{a, ı, o, u}

 $\subseteq$

{a, e, ı, i, o, ö, u, ü}

Kalın ünlülerin her biri bir ünlüdür.

4. BÖLÜM · KÜMELER



Alt küme değilse? Değilleme kuralını uygulayalım

MANTIK

 $\exists x$ $(x \in A$ $\wedge x \notin B)$

TÜRKÇE

A'da olup

B'de olmayan

en az bir eleman vardır

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x (x \in A \wedge x \notin B)$$

Kaynak: Ders notu 2-Kümeler



Örnek

$\{a, e\} \subseteq \text{kalın ünlüler}$



Yanlış: e kalın değil

$\emptyset \subseteq \text{kalın ünlüler}$



Doğru

Boş küme her kümenin alt kümesidir; çürütecek bir karşı örnek yoktur.



Bir kümenin bütün alt kümelerinden oluşan kümeye kuvvet kümesi denir.

$$P(\{a, e\}) = \{ \emptyset, \{a\}, \{e\}, \{a, e\} \}$$



n elemanlı bir kümenin 2^n alt kümesi vardır.

Her eleman için iki seçenek var: alt kümede ya vardır ya yoktur. Bu, n bitlik bütün sayıları saymakla aynı şeydir.

Kaynak: Rosen, Bölüm 2.1



İki kümenin kartezyen çarpımı, bütün sıralı ikililerden oluşur.

Günler = {Pazartesi, Çarşamba}, Saatler = {09:00, 13:00}

Günler $\times$ Saatler = { (Pazartesi, 09:00), (Pazartesi, 13:00), (Çarşamba, 09:00), (Çarşamba, 13:00) }

Kaynak: Rosen, Bölüm 2.1



$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

2 gün ve 2 saat varsa $2 \cdot 2 = 4$ farklı ders saati vardır.

Rosen'ın notu: $A \times B$ 'nin her alt kümesine bir bağlantı denir. Bir veri tabanı tablosu da böyle bir alt kümedir.

Kaynak: Rosen, Bölüm 2.1



Küme işlemleri, geçen haftanın bağlaçlarıdır.

Örneklere iki küme kullanacağız:

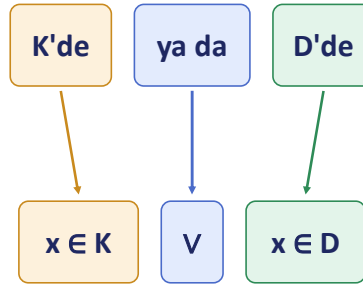
K = kalın ünlüler = $\{a, ı, o, u\}$ D = düz ünlüler = $\{e, i, \emptyset\}$

Kaynak: Rosen, Bölüm 2.2



Birleşim

TÜRKÇE



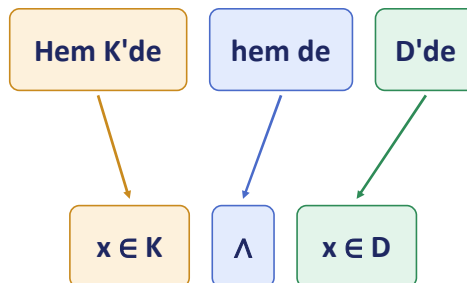
MANTIK

$$K \cup D = \{a, e, ı, i, o, u\}$$



Kesişim

TÜRKÇE



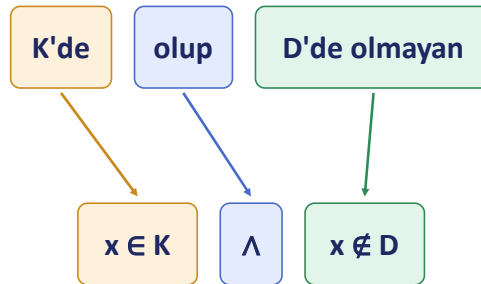
MANTIK

$$K \cap D = \{a, ı\}$$



Fark

TÜRKÇE



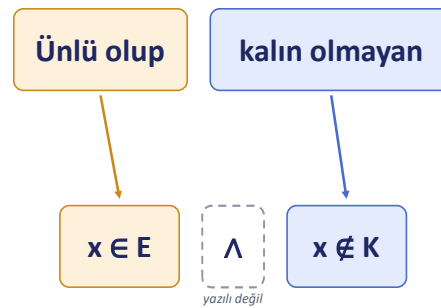
MANTIK

$$K - D = \{o, u\}$$



Tümleyen

TÜRKÇE



MANTIK

$$K' = \{e, i, ö, ü\} \text{ (ince ünlüler)}$$

E: evrensel küme, burada bütün ünlüler. Tümleyen her zaman bir evrensel kümeye göre tanımlanır.



Bir küme özdeşliğini mantıkla ispatlayalım: De Morgan

$$x \in (K \cap D)'$$

Başlangıç



$$\neg(x \in K \wedge x \in D)$$

Tümleyen ve kesişimin tanımı



$$x \notin K \vee x \notin D$$

Mantıktaki De Morgan kuralı



$$x \in K' \cup D'$$

Tümleyen ve birleşimin tanımı

$$(K \cap D)' = K' \cup D'$$

Kaynak: Rosen, Bölüm 2.2, "Küme Özdeşlikleri"



Bir bilgisayar kümeleri bit dizileriyle saklayabilir

Evrensel küme: a, e, ı, i, o, ö, u, ü (bu sırayla). Bir ünlü kümedeyse onun bitine 1, değilse 0 yazılır.

	a	e	ı	i	o	ö	u	ü
K (kalın)	1	0	1	0	1	0	1	0
D (düz)	1	1	1	1	0	0	0	0
$K \cap D = K \cap D$	1	0	1	0	0	0	0	0
$K \cup D = K \cup D$	1	1	1	1	1	0	1	0

$$K \cap D = \{a, ı\} \quad K \cup D = \{a, e, ı, i, o, u\}$$

Küme işlemleri, işlemcinin en hızlı komutları olan bit işlemlerine dönüşür.

Kaynak: Rosen, Bölüm 2.2, "Kümelerin Bilgisayarda Gösterimi"



ÖZET

Bugün Neler Öğrendik?

Altı cümle ve açılıştaki sorunun cevabı

ÖZET - 1



Açık önerme, içinde değişken bulunan ve değişkene değer verilince doğru ya da yanlış olan cümledir.

ÖZET - 2



“Bazı” iddiasını kanıtlamak için bir örnek, “her” iddiasını çürütmek için bir karşı örnek yeter.

ÖZET - 3



Değil işareti bir niceleyicinin önünden geçerken $\forall$ 'yi $\exists$ 'ye, $\exists$ 'yi $\forall$ 'ye çevirir.

“Herkes teslim etti” cümlesinin değili “teslim etmeyen biri var” cümlesidir.

ÖZET · 4



$\forall$ ile genellikle $\rightarrow$, $\exists$ ile genellikle $\wedge$ kullanılır.

Türkçede “her” sözcüğü çoğu zaman yazılmaz: “İşleyen demir ısıldar.”

ÖZET · 5



Niceleyicilerin sırası değişince anlam değişir.

“Her yiğidin bir yoğurt yiyişi vardır” ($\forall\exists$) ile “her derde deva bir ilaç” ($\exists\forall$) farklı iddialardır.

ÖZET - 6



Kümeler, açık önermelerin doğruluk kümeleridir; küme işlemleri de mantık bağlaçlarıdır.

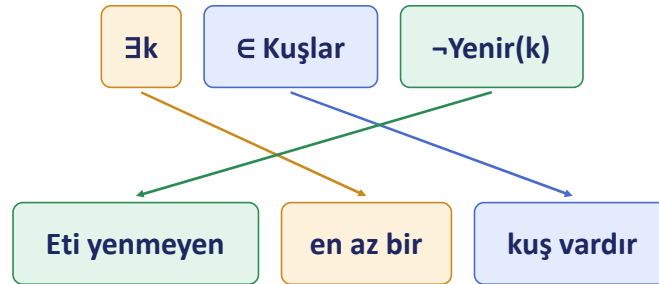
AÇILIŞTAKI SORUNUN CEVABI



“Her kuşun eti yenmez” ne demek?

MANTIK

TÜRKÇE



Atasözü, kuşların hiçbirinin eti yenmez demiyor; eti yenmeyen kuşların da olduğunu söylüyor.

Kaynak: TDK Atasözleri ve Deyimler Sözlüğü, “her kuşun eti yenmez” maddesi

KAYNAKLAR VE GELECEK HAFTA



Bu haftanın konularını nereden çalışabilirsiniz?



Ders kitabı

Rosen, Ayrık Matematik ve Uygulamaları: Bölüm 1.4 (yüklemler ve niceleyiciler), 1.5 (iç içe niceleyiciler), 2.1 (kümeler) ve 2.2 (küme işlemleri).



Video

MIT 6.042J Mathematics for Computer Science (2015), "1.5 Quantifiers & Predicate Logic" bölümündeki üç kısa video. MIT OpenCourseWare'de ücretsiz.



Gelecek hafta

Fonksiyonlar: birebir ve örten fonksiyonlar, ters fonksiyon ve bileşke. Bugün gördüğümüz kümeler, tanım ve değer kümesi olarak karşımıza çıkacak.

Sorularınızı Teams sohbetine ya da kanal üzerinden iletebilirsiniz.