UFUK ÜNİVERSİTESİ · BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİ · GÜZ DÖNEMİ

MAT201 · 6. Hafta

İstanbul'un Plakaları Neden Tükeniyor?

Sayma: çarpma ve toplama kuralları, güvercin yuvası ilkesi, permütasyon ve kombinasyon

Dr. Alaettin Uçan

Rosen, Bölüm 6.1–6.5

6. HAFTA · BUGÜNÜN AKIŞI

Bugün altı bölümde ilerleyeceğiz

1. **Çarpma kuralı**
   Art arda yapılan seçimler: plakalar, bit dizileri, şifreler
2. **Toplama, çıkarma ve bölme kuralları**
   "Ya o ya bu" seçimleri; iki kez sayılanı düzeltmek
3. **Güvercin yuvası ilkesi**
   Saymadan "mutlaka vardır" diyebilmek
4. **Permütasyon**
   Sıranın önemli olduğu seçimler
5. **Kombinasyon**
   Sıranın önemsiz olduğu seçimler
6. **Binom katsayıları ve tekrarlı seçimler**
   Pascal üçgeni; aynı türden birden çok nesne seçmek

Sunumun sonunda kendinizi sınayabileceğiniz yedi soru var.

AÇILIŞ

İstanbul'da hususi araçlara verilebilecek plaka serileri tükenmek üzere.

Bugünkü plakalarda rakam grubu üç haneli. Seçeneklerden biri, rakam grubunu dört haneye çıkarmak: 34 XXX 0001.

Kaynak: Halk TV, "Araç sahipleri dikkat! İstanbul'da plaka sistemi için kritik gelişme" (2026)

AÇILIŞ

SORU

Rakam grubuna tek bir hane eklemek, plaka sayısını kaç katına çıkarır?

Tahmininizi sohbete yazın. Bu soruyu bugünün ilk kuralıyla birkaç saniyede cevaplayacağız.

AÇILIŞ

Bu tür sorularda olasılıkları tek tek yazıp saymayız; sayıyı kurallarla buluruz.

Bu derste o kuralları öğreneceğiz. Bilgisayar mühendisliğinde de sık sık sorarız: bir algoritma kaç durumu denemek zorunda, kaç farklı şifre ya da adres var?

1. BÖLÜM

Çarpma Kuralı

Art arda yapılan seçimlerin sayıları çarpılır

1. BÖLÜM · ÇARPMA KURALI

Küçük bir örnekle başlayalım: 3 bitlik dizilerin hepsi

000	001	010	011	100	101	110	111

Birinci bit için 2 seçenek var: 0 ya da 1. İkinci ve üçüncü bit için de ikişer seçenek. Toplam 2 · 2 · 2 = 8. Saymak yerine çarptık.

1. BÖLÜM · ÇARPMA KURALI

Çarpma kuralı: Bir iş art arda iki adımda yapılıyorsa, birinci adım n_1 farklı biçimde, ikinci adım n_2 farklı biçimde yapılabiliyorsa, iş $n_1 \cdot n_2$ farklı biçimde yapılır.

Adım sayısı ikiden fazla olunca da kural aynıdır: bütün adımların seçenek sayıları çarpılır.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.1

DİKKAT

Kuralın tek koşulu: ikinci adımdaki seçenek sayısı, birinci adımda ne seçildiğine bağlı olmamalı.

Seçenekler değişebilir ama sayıları değişmemeli. Bu koşul sağlanmıyorsa birazdan göreceğimiz ağaç diyagramına başvururuz.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.1

Türkçeden matematiğe

TÜRKÇE

Birinci adım n_1 biçimde — **ve ardından** — **ikinci adım n_2 biçimde**

MATEMATİK

n_1 · n_2

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Kümelerle söylersek: A'dan bir eleman, ardından B'den bir eleman seçmenin yolları A × B'nin elemanlarıdır.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.1

1. BÖLÜM · ÇARPMA KURALI

İki çalışana 12 odadan farklı birer oda kaç biçimde verilir?

Birinci çalışanın odası		İkinci çalışanın odası
12	·	11

12 · 11 = 132 farklı biçimde

İkinci çalışana 11 seçenek kalıyor, çünkü bir oda dolu. Hangi odanın dolu olduğu değişse de seçenek sayısı hep 11.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.1, Örnek 1

1. BÖLÜM · ÇARPMA KURALI

Koltuk etiketleri: bir harf ve 1–100 arası bir sayı

Harf (İngiliz alfabesi)		Sayı (1'den 100'e)
26	·	100

26 · 100 = 2600 farklı etiket

Yani en fazla 2600 koltuk farklı etiket alabilir.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.1, Örnek 2

1. BÖLÜM · ÇARPMA KURALI

Veri merkezi: 32 bilgisayar, her birinde 24 bağlantı noktası

Bilgisayar		Bağlantı noktası
32	·	24

32 · 24 = 768 bağlantı noktası

Bir bağlantı noktası seçmek, önce bir bilgisayar, sonra o bilgisayardaki bir nokta seçmektir.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.1, Örnek 3

1. BÖLÜM · ÇARPMA KURALI

7 bitlik kaç farklı dizi vardır?

1. bit		2. bit		3. bit		4. bit		5. bit		6. bit		7. bit
2	·	2	·	2	·	2	·	2	·	2	·	2

2^7 = 128 farklı dizi

Aynı çarpanı tekrar tekrar yazmak yerine üs kullanırız.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.1, Örnek 4

1. BÖLÜM · ÇARPMA KURALI

Üç harf ve üç rakamlı kaç plaka yapılabilir?

Harf	Harf	Harf	Rakam	Rakam	Rakam
26	26	26	10	10	10

$26^3 \cdot 10^3 = 17\,576\,000$ plaka

Açılıştaki sorunun cevabı da burada: her rakam hanesi plaka sayısını 10 ile çarpar.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.1, Örnek 5

1. BÖLÜM · ÇARPMA KURALI

n! (n faktöriyel), 1'den n'ye kadar bütün pozitif tam sayıların çarpımıdır.

Örneğin 4! = 4 · 3 · 2 · 1 = 24. Tanım gereği 0! = 1. Faktöriyel, çarpma kuralının en sık karşımıza çıkan sonucudur.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.1

n farklı nesne n! farklı biçimde sıraya dizilir.

Birinci sıraya n, ikinci sıraya n − 1, üçüncü sıraya n − 2 nesneden biri gelir; son sıraya tek nesne kalır. Hepsini çarpınca n! buluruz.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.1

m elemanlı bir kümeden n elemanlı bir kümeye kaç fonksiyon tanımlanabilir?

Tanım kümesindeki her eleman için, değer kümesindeki n elemandan birini seçeriz. m eleman için $n \cdot n \cdot \cdots \cdot n = n^m$ fonksiyon. Örneğin 3 elemanlı bir kümeden 5 elemanlı bir kümeye $5^3 = 125$ fonksiyon vardır.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.1, Örnek 6

1. BÖLÜM · ÇARPMA KURALI

Peki bunların kaç tanesi birebirdir? (m ≤ n)

a_1'in görüntüsü: n seçenek

↓

a_2'nin görüntüsü: n − 1 seçenek — *a_1'in görüntüsü kullanılamaz*

↓

a_3'ün görüntüsü: n − 2 seçenek — *İlk iki görüntü kullanılamaz*

↓

a_m'nin görüntüsü: n − m + 1 seçenek

n(n − 1)(n − 2) ⋯ (n − m + 1) birebir fonksiyon vardır.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.1, Örnek 7

1. BÖLÜM · ÇARPMA KURALI

n elemanlı bir kümenin kaç alt kümesi vardır?

Elemanları sıraya koyalım: $a_1, a_2, \ldots, a_n$

↓

Her eleman için iki seçenek: alt kümede var ya da yok — *Var: 1, yok: 0*

↓

Her alt küme, n bitlik bir diziye karşılık gelir — *Örneğin $\{a_1, a_3\} \leftrightarrow 101$*

↓

$2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2 = 2^n$ — *Çarpma kuralı*

n elemanlı bir kümenin 2^n alt kümesi vardır.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.1, Örnek 10

1. BÖLÜM · ÇARPMA KURALI

2. haftadaki doğruluk tabloları da çarpma kuralına uyuyordu: n önermeli bir tabloda 2^n satır vardı.

Her önerme ya doğru ya yanlıştır. Her satır, önermelere doğru ya da yanlış değeri veren bir seçimdir.

1. BÖLÜM · ÇARPMA KURALI

İç içe döngüler kaç kez döner?

nested_loops.py

```
k = 0
for i in range(n1):
    for j in range(n2):
        for t in range(n3):
            k += 1          # runs n1 * n2 * n3 times
print(k)
```

Çarpma kuralı

Her döngü bir adımdır. En içteki satır, adımların seçenek sayılarının çarpımı kadar çalışır.

Geçen hafta

İç içe iki döngünün $O(n^2)$ sürmesinin nedeni de bu: $n \cdot n$.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.1, Örnek 9

1. BÖLÜM · ÇARPMA KURALI

Python ile kontrol: itertools.product

product.py

```
from itertools import product

bits = list(product("01", repeat=7))
print(len(bits))        # 128 = 2 ** 7
```

product, seçimlerin bütün birleşimlerini tek tek üretir. Küçük örneklerde sonucu böyle doğrulayabilirsiniz.

2. BÖLÜM

Toplama, Çıkarma ve Bölme Kuralları

"Ya o ya bu" seçimleri ve iki kez sayılanı düzeltmek

Toplama kuralı: Bir iş ya n_1 farklı biçimde ya da n_2 farklı biçimde yapılabiliyorsa ve bu iki grupta ortak bir yol yoksa, iş $n_1 + n_2$ farklı biçimde yapılır.

Grup sayısı ikiden fazla olunca da kural aynıdır: grupların büyüklükleri toplanır.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.1

Ne zaman çarparız, ne zaman toplarız?

Çarpma kuralı

Önce birini, ardından ötekini seçeriz.

Her iki seçim de yapılır.

Anahtar sözcük: “ve sonra”

$n_1 \cdot n_2$

Toplama kuralı

Ya birinden ya ötekinden seçeriz.

Yalnızca bir seçim yapılır.

Anahtar sözcük: “ya … ya da”

$n_1 + n_2$

Bir sayma sorusunu okurken önce bu ayrımı yapın.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.1

Bir kurula ya matematik bölümünün 37 öğretim üyesinden ya da 83 matematik öğrencisinden biri seçilecek. Kaç seçenek var?

Hiç kimse hem öğretim üyesi hem öğrenci değil; iki grup ayrık. Toplama kuralı: 37 + 83 = 120.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.1, Örnek 12

Bir öğrenci projesini 23, 15 ve 19 projelik üç listeden birinden seçecek. Hiçbir proje iki listede birden yoksa kaç seçeneği vardır?

23 + 15 + 19 = 57.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.1, Örnek 13

2. BÖLÜM · TOPLAMA, ÇIKARMA, BÖLME

Türkçeden matematiğe

TÜRKÇE

Ya A'dan | ya da B'den seçilecek | ortak eleman yok

MATEMATİK

$|A \cup B| = |A| + |B|$ $A \cap B = \emptyset$

$A \cap B = \emptyset$ ise $|A \cup B| = |A| + |B|$

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.1

29

2. BÖLÜM · TOPLAMA, ÇIKARMA, BÖLME

Şifre örneği: 6 ila 8 karakterlik şifreler büyük harf ve rakamlardan oluşuyor ve en az bir rakam içermek zorunda. Kaç şifre vardır?

Bu soruda üç kural birlikte çalışıyor. Önce uzunluğa göre ayıralım: 6, 7 ya da 8 karakter. Toplama kuralı.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.1, Örnek 16

30

“En az bir rakam” koşulunu doğrudan saymak zordur. Bunun yerine bütün şifreleri sayıp hiç rakam içermeyenleri çıkarırız.

6 karakterlik diziler: her karakter için 26 harf + 10 rakam = 36 seçenek, toplam 36^6. Hiç rakam içermeyenler: 26^6. En az bir rakam içerenler: $36^6 - 26^6$.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.1, Örnek 16

Şifre örneğinin sonucu

6 karakter: $36^6 - 26^6 = 1\,867\,866\,560$

↓

7 karakter: $36^7 - 26^7 = 70\,332\,353\,920$

↓

8 karakter: $36^8 - 26^8 = 2\,612\,282\,842\,880$

↓

Toplam: 2 684 483 063 360 *Toplama kuralı*

Yaklaşık 2,7 trilyon şifre.

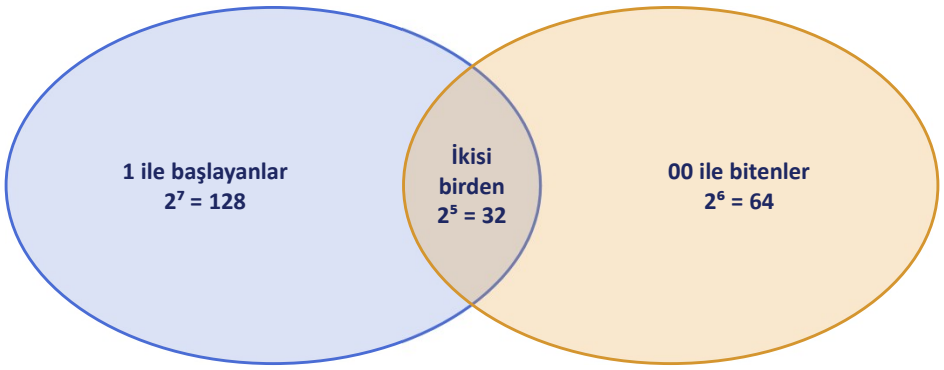
Kaynak: Rosen, Bölüm 6.1, Örnek 16

Gruplar ayrık değilse toplama kuralı yanlış sonuç verir: her iki grupta da bulunanlar iki kez sayılır.

Çıkarma kuralı bu hatayı düzeltir: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. İki kez sayılanları bir kez çıkarırız. Bu kurala içerme-dışarma ilkesi de denir.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.1

1 ile başlayan ya da 00 ile biten 8 bitlik kaç dizi vardır?



$128 + 64 - 32 = 160$ dizi

Hem 1 ile başlayıp hem 00 ile biten 32 dizi her iki grupta da sayıldı; bu yüzden bir kez çıkarıyoruz.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.1, Örnek 18

Bölme kuralı: Bir yöntem her sonucu tam d kez sayıyorsa, gerçek sonuç sayısı bulunan sayının d'de biridir.

Önce her sonucu aynı sayıda tekrar eden kolay bir sayım yaparız, sonra tekrar sayısına böleriz.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.1

Dört kişi yuvarlak bir masaya kaç farklı biçimde oturabilir?

Koltukları 1'den 4'e numaralayalım: 4! = 24 oturuş	*Çarpma kuralı*
↓	
Herkesin sağındaki ve solundaki kişi aynıysa iki oturuş aynıdır	*Masayı döndürmek bir şey değiştirmez*
↓	
Her oturuş 4 kez sayıldı	*1 numaralı koltuğa 4 kişiden biri oturabilir*
↓	
24 / 4 = 6	*Bölme kuralı*

Dört kişi yuvarlak masaya 6 farklı biçimde oturabilir.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.1, Örnek 21

Seçenek sayıları birbirine bağlıysa çarpma kuralı doğrudan uygulanamaz. O zaman olasılıkları bir ağaçta dallara ayırırız.

Ağacın her dalı bir seçimi, her yaprağı bir sonucu gösterir. Yaprakları sayarak sonuca ulaşırız.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.1

İki 1'i yan yana içermeyen 4 bitlik diziler

0000	0001	0010	0100	0101	1000	1001	1010

Bir bit 1 ise ondan sonraki bit için tek seçenek kalır: 0. Seçenek sayısı önceki seçime bağlı olduğu için çarpamayız. Ağaçla saydığımızda 8 dizi buluruz.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.1, Örnek 22

2. BÖLÜM · TOPLAMA, ÇIKARMA, BÖLME

Python ile kontrol

tree_check.py

```
from itertools import product

ok = [s for s in product("01", repeat=4)
      if "11" not in "".join(s)]
print(len(ok))           # 8
```

Bütün 16 diziyi üretip koşulu sağlayanları saydık.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.1, Örnek 22

3. BÖLÜM

Güvercin Yuvası İlkesi

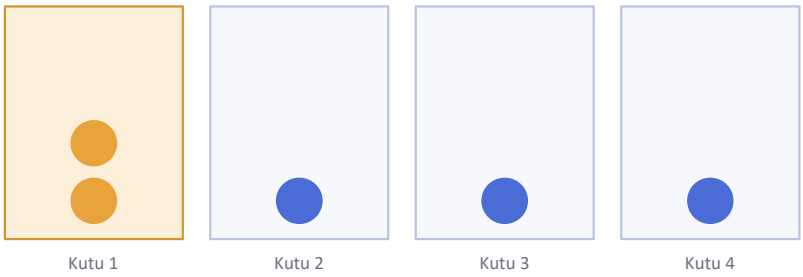
Saymadan "mutlaka vardır" diyebilmek

Güvercinlerin sayısı yuvaların sayısından fazlaysa, en az bir yuvada birden fazla güvercin vardır.

Çok basit görünen bu gözlem, saymadan bir şeyin var olduğunu kanıtlamamızı sağlar.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.2

4 kutuya 5 nesne yerleştirelim



Her kutuya birer nesne koysak bile bir nesne açıkta kalır. Nasıl yerleştirirsek yerleştirelim, bir kutuda en az iki nesne olur.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.2

Güvercin yuvası ilkesi: k + 1 ya da daha fazla nesne k kutuya yerleştirilirse, en az bir kutuda en az iki nesne bulunur.

İlkeyi ilk kez sistemli olarak kullanan Alman matematikçinin adıyla Dirichlet çekmece ilkesi de denir.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.2, Teorem 1

Türkçeden mantığa

TÜRKÇE

k + 1 nesne | **k kutuya konursa** | **en az bir kutuda** | **en az iki nesne vardır**

MANTIK

N ≥ k + 1 → **∃ kutu** | **nesne sayısı ≥ 2**

N ≥ k + 1 → ∃ kutu (kutudaki nesne sayısı ≥ 2)

"En az bir kutuda" sözü, 3. haftadaki varlık niceleyicisidir: ∃.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.2

367 kişilik her toplulukta doğum günü aynı olan en az iki kişi vardır.

Yılda en fazla 366 gün var. Kişiler nesneler, günler kutular: 367 > 366.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.2, Örnek 1

27 İngilizce sözcükten oluşan her listede, aynı harfle başlayan en az iki sözcük vardır.

İngiliz alfabesinde 26 harf var. Sözcükler nesneler, harfler kutular: 27 > 26.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.2, Örnek 2

0–100 arasında puanlanan bir sınavda, iki öğrencinin aynı puanı aldığını garanti etmek için sınıfta en az kaç öğrenci olmalı?

101 farklı puan var, yani 101 kutu. 102 öğrenciyle en az ikisinin puanı aynıdır. 101 öğrenciyle ise herkesin puanı farklı olabilir.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.2, Örnek 3

DİKKAT

İlke hangi kutunun dolu olduğunu söylemez; yalnızca dolu bir kutunun var olduğunu söyler.

367 kişilik toplulukta hangi iki kişinin aynı gün doğduğunu bilmeyiz. Yalnızca böyle iki kişinin mutlaka bulunduğunu biliriz.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.2

İlkenin fonksiyonlarla söylenişi: k + 1 ya da daha fazla elemanlı bir kümeden k elemanlı bir kümeye giden hiçbir fonksiyon birebir olamaz.

Tanım kümesinin elemanları nesneler, değer kümesinin elemanları kutulardır. İki elemanın aynı kutuya düşmesi, aynı görüntüye gitmeleri demektir.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.2, Sonuç 1

Genelleştirilmiş güvercin yuvası ilkesi: N nesne k kutuya yerleştirilirse, en az bir kutuda en az [N/k] nesne bulunur.

[x], x'ten küçük olmayan en küçük tam sayıdır (4. haftadaki tavan fonksiyonu). Örneğin ⌈7/3⌉ = ⌈2,33…⌉ = 3.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.2, Teorem 2

Neden doğru? Her kutuda en fazla ⌈N/k⌉ − 1 nesne olsaydı, toplam nesne sayısı N'den az olurdu.

k kutu, her birinde en fazla ⌈N/k⌉ − 1 nesne: toplam en fazla k(⌈N/k⌉ − 1) < k · (N/k) = N. Ama elimizde N nesne var. Çelişki.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.2, Teorem 2

100 kişi arasında aynı ayda doğmuş en az ⌈100/12⌉ = 9 kişi vardır.

12 ay, 12 kutu. Her ayda en fazla 8 kişi olsaydı toplam en fazla 96 kişi olurdu.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.2, Örnek 5

Türkiye'de doğum günü aynı olan en az kaç kişi vardır?

N = 86 092 168 kişi	*Türkiye'nin nüfusu*
↓	
k = 366 olası doğum günü	*29 Şubat dahil*
↓	
⌈86 092 168 / 366⌉ = ⌈235 224,5…⌉	
↓	
= 235 225	*Tavan fonksiyonu*

Türkiye'de doğum günü aynı olan en az 235 225 kişi vardır.

Kaynak: TÜİK, Adrese Dayalı Nüfus Kayıt Sistemi 2025 sonuçları

Beş harf notunun verildiği bir derste, en az altı öğrencinin aynı notu aldığını garanti etmek için en az kaç öğrenci gerekir?

25 öğrenciyle her nottan beşer kişi olabilir. 26. öğrenci hangi notu alırsa alsın o notu alan altıncı kişi olur. Cevap: $5 \cdot 5 + 1 = 26$.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.2, Örnek 6

52'lik bir desteden aynı renkten (maça, kupa, karo ya da sinek) en az üç kart çektiğimizi garanti etmek için kaç kart çekmeliyiz?

Dört renk dört kutudur. 8 kartla her renkten ikişer kart gelebilir. 9. kart hangi renkten gelirse gelsin o renkten üçüncü kart olur: $2 \cdot 4 + 1 = 9$.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.2, Örnek 7

Peki en az üç kupa çektiğimizi garanti etmek için kaç kart çekmeliyiz?

Bu kez kötü senaryoyu düşünelim: önce kupa olmayan 39 kartın hepsi gelebilir. Ardından gelen 3 kart mutlaka kupadır: $39 + 3 = 42$.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.2, Örnek 7

Genel kural: k kutunun en az birinde r nesne olmasını garanti eden en küçük nesne sayısı k(r − 1) + 1'dir.

k(r − 1) nesne, her kutuya r − 1 tane konarak dağıtılabilir. Bir nesne daha eklenince bir kutu r'ye ulaşır.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.2

4. BÖLÜM

Permütasyon

Sıranın önemli olduğu seçimler

Beş öğrenciden üçü bir fotoğraf için yan yana dizilecek. Kaç farklı dizilim vardır?

Burada sıra önemli: Ali–Banu–Can ile Can–Banu–Ali iki farklı fotoğraftır.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.3, Örnek 1

Üç kişilik dizilimi adım adım sayalım

Soldaki kişi	Ortadaki kişi	Sağdaki kişi
5	4	3

5 · 4 · 3 = 60 farklı dizilim

Beş öğrencinin hepsi dizilseydi 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 5! = 120 dizilim olurdu.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.3, Örnek 1

4. BÖLÜM · PERMÜTASYON

Permütasyon, farklı nesnelerin sıralı bir dizilişidir. n nesneden r tanesinin sıralı bir seçimine r-permütasyon denir.

n nesnenin r-permütasyonlarının sayısı P(n, r) ile gösterilir. Örneğin {a, b, c} kümesinin 2-permütasyonları ab, ac, ba, bc, ca ve cb'dir: P(3, 2) = 6.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.3, Örnek 3

4. BÖLÜM · PERMÜTASYON

P(n, r) nasıl hesaplanır?

$P(n, r) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-r+1)$	*Çarpma kuralı: r adım*
$= n! / (n-r)!$	*Aynı çarpımın kısa yazılışı*
$P(n, n) = n!$	*Bütün nesneleri dizmek*

Pratik yol: n'den başlayıp geriye doğru r tane sayı çarpılır. P(10, 3) = 10 · 9 · 8 = 720.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.3, Teorem 1

4. BÖLÜM · PERMÜTASYON

Türkçeden matematiğe

TÜRKÇE

n farklı nesneden | r tanesini | sırası önemli olarak seçmek

MATEMATİK

P(n, r) = n! / (n − r)!

$$P(n, r) = n! / (n - r)!$$

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.3

4. BÖLÜM · PERMÜTASYON

Bir yarışmaya katılan 100 kişiden birinci, ikinci ve üçüncülük ödülünü kazananlar kaç farklı biçimde belirlenebilir?

Kimin hangi ödülü aldığı önemli. $P(100, 3) = 100 \cdot 99 \cdot 98 = 970\,200$.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.3, Örnek 4

Sekiz koşucunun yarıştığı bir yarışta altın, gümüş ve bronz madalyalar kaç farklı biçimde dağıtılabilir?

P(8, 3) = 8 · 7 · 6 = 336.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.3, Örnek 5

Bir satış temsilcisi belirli bir şehirden yola çıkıp sekiz şehri dolaşacak. Kaç farklı rota izleyebilir?

İlk şehir belli; kalan yedi şehir her sırada gezilebilir: 7! = 5040 rota. En kısa rotayı bu yolla bulmak için 5040 rotanın hepsinin uzunluğu hesaplanmalıdır.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.3, Örnek 6

Geçen hafta aynı soruyu 81 il için sormuştuk: 80!/2 ≈ $3{,}6 \cdot 10^{118}$ rota.

Şehir sayısı biraz artınca permütasyon sayısı faktöriyel hızıyla büyür. Bu yüzden bütün rotaları denemek umutsuzdur.

ABC'yi yan yana içeren dizilişler

Soru: ABCDEFGH'nin kaç dizilişinde ABC bu sırayla yan yana?

↓

ABC'yi tek bir blok gibi düşünelim — *Blok hiç bölünmeyecek*

↓

Dizilecek nesneler: [ABC], D, E, F, G, H — *Altı nesne*

↓

6! = 720 — *Altı nesnenin bütün dizilişleri*

ABC bloğunu içeren 720 diziliş vardır.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.3, Örnek 7

4. BÖLÜM · PERMÜTASYON

Python'da permütasyon

permutations.py

```
from itertools import permutations
from math import perm

print(list(permutations("abc", 2)))
# ab, ac, ba, bc, ca, cb   ->   6 = P(3, 2)

print(perm(100, 3))      # 970200
```

permutations dizilişleri tek tek üretir; perm yalnızca sayısını hesaplar.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.3

69

5. BÖLÜM

Kombinasyon

Sıranın önemsiz olduğu seçimler

5. BÖLÜM · KOMBİNASYON

Dört öğrenciden (A, B, C, D) üç kişilik kaç farklı komisyon kurulabilir?

Komisyonda kimin önce seçildiği önemli değil: {A, B, C} ile {C, B, A} aynı komisyondur.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.3, Örnek 8

5. BÖLÜM · KOMBİNASYON

Bütün komisyonları yazalım

{A, B, C} **{A, B, D}** **{A, C, D}** **{B, C, D}**

4 komisyon var. Sıralı seçseydik P(4, 3) = 24 dizilim bulurduk. Her komisyon 3! = 6 farklı sırayla yazılabildiği için 24 / 6 = 4.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.3, Örnek 8

5. BÖLÜM · KOMBİNASYON

Kombinasyon, n elemanlı bir kümeden sırası önemsiz olarak seçilen r elemanlı bir alt kümedir. Sayısı C(n, r) ile gösterilir.

C(n, r), n üstte ve r altta olacak biçimde büyük bir parantezle de yazılır ve “n'nin r'li kombinasyonu” diye okunur.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.3

5. BÖLÜM · KOMBİNASYON

C(n, r) nasıl hesaplanır?

Önce sıralı seçelim: P(n, r) diziliş

↓

Her alt küme r! farklı sırayla yazılabilir — *r nesnenin dizilişleri*

↓

Her alt küme r! kez sayıldı: C(n, r) · r! = P(n, r) — *Bölme kuralı*

↓

C(n, r) = n! / (r! (n − r)!)

Pratik yol: P(n, r)'yi hesaplayıp r!'e bölün. C(10, 3) = (10 · 9 · 8) / (3 · 2 · 1) = 120.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.3, Teorem 2

5. BÖLÜM · KOMBİNASYON

Türkçeden matematiğe

TÜRKÇE

n elemandan | r tanesini | sırası önemsiz olarak seçmek

MATEMATİK

C(n, r) = n! / (r! (n – r)!)

C(n, r) = n! / (r! (n – r)!)

Paydadaki r!, aynı seçimin farklı sıralarını tek bir seçime indirir.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.3

5. BÖLÜM · KOMBİNASYON

{a, b, c, d} kümesinden iki eleman seçmek

Sıra önemsiz: C(4, 2) = 6

{a, b} {a, c} {a, d}
{b, c} {b, d} {c, d}

Sıra önemli: P(4, 2) = 12

ab ac ad ba bc bd
ca cb cd da db dc

En sık yapılan hata: sıra önemsizken P(n, r) kullanmak. Her alt küme iki kez sayılır.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.3, Örnek 10

52 kartlık bir desteden 5 kartlık kaç farklı el dağıtılabilir?

Kartların geliş sırası önemli değil: C(52, 5) = (52 · 51 · 50 · 49 · 48) / (5 · 4 · 3 · 2 · 1) = 2 598 960.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.3, Örnek 11

Aynı desteden 47 kart seçmenin de 2 598 960 yolu vardır.

47 kart seçmek, geride bırakılacak 5 kartı seçmekle aynı şeydir. Genel olarak C(n, r) = C(n, n − r).

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.3, Örnek 11 ve Sonuç 2

10 kişilik bir tenis takımından, başka bir okuldaki maça gidecek 5 oyuncu kaç farklı biçimde seçilebilir?

Yalnızca kimlerin gittiği önemli: C(10, 5) = 252.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.3, Örnek 12

Mars'a gidecek ilk ekip için eğitilmiş 30 astronottan 6 kişilik bir ekip kaç farklı biçimde seçilebilir?

Ekipteki herkesin görevi aynı varsayılıyor, yani sıra önemsiz: C(30, 6) = 593 775.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.3, Örnek 13

n bitlik dizilerden tam olarak r tanesi 1 olanların sayısı C(n, r)'dir.

Bir dizi, 1'lerin hangi konumlarda durduğuyla tamamen belirlenir. n konumdan r tanesini seçmek C(n, r) yolla yapılır.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.3, Örnek 14

3 + 4 kişilik bir komisyon

9 matematikçiden 3'ü: C(9, 3) = 84	*Sıra önemsiz*
↓	
11 bilgisayar bilimciden 4'ü: C(11, 4) = 330	*Sıra önemsiz*
↓	
84 · 330 = 27 720	*Çarpma kuralı: iki seçim art arda*

Komisyon 27 720 farklı biçimde kurulabilir. Kombinasyon ile çarpma kuralı birlikte kullanıldı.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.3, Örnek 15

5. BÖLÜM · KOMBİNASYON

Çılgın Sayısal Loto'da kaç farklı kolon var?

1–90 arasından 6 sayı; işaretleme sırası önemsiz — *Kombinasyon*

↓

C(90, 6) = (90 · 89 · 88 · 87 · 86 · 85) / 6!

↓

= 622 614 630

622 milyondan fazla kolon. Büyük ikramiyeyi garantilemek için hepsini oynamak gerekir.

Kaynak: Milli Piyango, Çılgın Sayısal Loto ve Şans Topu oyun kuralları

5. haftadaki tekrar kontrolü bütün çiftleri karşılaştırıyordu: n(n – 1)/2 = C(n, 2).

n kayıttan iki kayıt seçmenin yolları, karşılaştırılacak çiftlerdir. 86 milyon kayıt için bu sayı yaklaşık $3{,}7 \cdot 10^{15}$ idi.

5. BÖLÜM · KOMBİNASYON

Python'da kombinasyon

combinations.py

```
from itertools import combinations
from math import comb

print(list(combinations("abcd", 2)))
# ab, ac, ad, bc, bd, cd  ->  6 = C(4, 2)

print(comb(52, 5))       # 2598960
print(comb(90, 6))       # 622614630
```

combinations seçimleri tek tek üretir; comb yalnızca sayısını hesaplar.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.3

85

5. BÖLÜM · KOMBİNASYON

Sıra önemli mi? Seçim sorularında önce bu soruyu sorun.

Sıra önemliyse permütasyon: ödüller, madalyalar, rotalar. Sıra önemsizse kombinasyon: komisyonlar, ekipler, kart elleri, loto kolonları.

86

6. BÖLÜM

Binom Katsayıları ve Tekrarlı Seçimler

Pascal üçgeni; aynı türden birden çok nesne seçmek

$(x + y)^3 = (x + y)(x + y)(x + y)$ çarpımını açarken her parantezden ya x'i ya y'yi seçeriz.

x^2y terimi, üç parantezin ikisinden x, birinden y seçilerek elde edilir. y'nin hangi parantezden geleceği $C(3, 1) = 3$ biçimde seçilir. Bu yüzden x^2y'nin katsayısı 3'tür.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.4, Örnek 1

$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

Katsayılar sırasıyla C(3, 0), C(3, 1), C(3, 2) ve C(3, 3): 1, 3, 3, 1.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.4, Örnek 1

Binom teoremi: $(x + y)^n$ açılımında $x^{n-j}y^j$ teriminin katsayısı C(n, j)'dir.

Bu yüzden C(n, j) sayılarına binom katsayıları denir.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.4, Teorem 1

Örnek: $(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

Katsayılar C(4, 0) = 1, C(4, 1) = 4, C(4, 2) = 6, C(4, 3) = 4 ve C(4, 4) = 1.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.4, Örnek 2

$(x + y)^{25}$ açılımında $x^{12}y^{13}$ teriminin katsayısı nedir?

25 parantezin 13'ünden y seçilir: C(25, 13) = 5 200 300.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.4, Örnek 3

Binom teoreminde x = y = 1 alınırsa: C(n, 0) + C(n, 1) + ⋯ + C(n, n) = 2^n.

Sayarak da görülür: soldaki toplam, n elemanlı bir kümenin 0, 1, …, n elemanlı alt kümelerinin sayısıdır; yani bütün alt kümelerin sayısı 2^n.

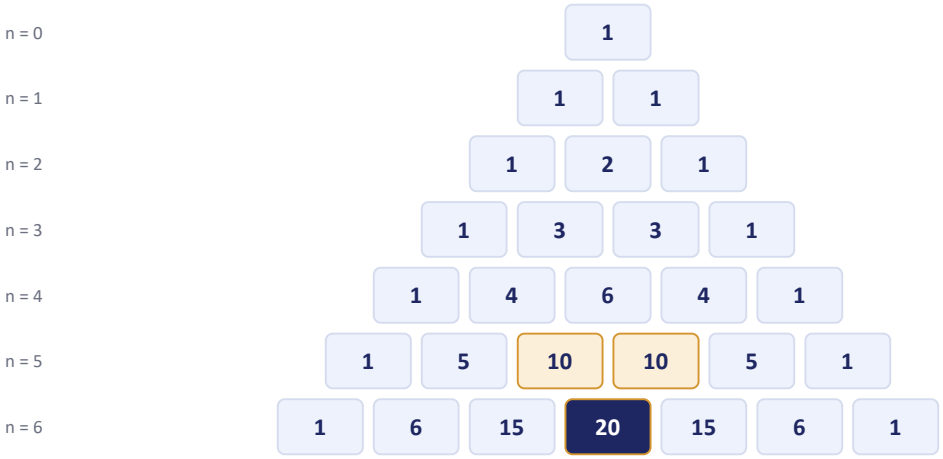
Kaynak: Rosen, Bölüm 6.4, Sonuç 1

Pascal özdeşliği: C(n + 1, k) = C(n, k − 1) + C(n, k).

n + 1 elemanlı bir kümeden bir a elemanı seçelim. k elemanlı alt kümeler ya a'yı içerir (C(n, k − 1) tane) ya içermez (C(n, k) tane). Toplama kuralı.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.4, Teorem 2

Pascal üçgeni: her sayı, üstündeki iki sayının toplamıdır



Örnek: C(5, 2) + C(5, 3) = 10 + 10 = 20 = C(6, 3). n. satırdaki sayılar $(x + y)^n$'nin katsayılarıdır.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.4

Şimdiye kadar her nesneyi en fazla bir kez seçtik. Peki aynı nesne birden çok kez seçilebilirse?

Örneğin bir şifrede aynı harf birden çok kez kullanılabilir; bir sepete aynı türden birçok meyve konabilir.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.5

Tekrarlı ve sıralı seçim: n türden r nesne, tekrara izin verilerek sıralı olarak n^r farklı biçimde seçilir.

Her konum için n seçenek var: çarpma kuralı. Örneğin İngiliz alfabesinin büyük harfleriyle r uzunluklu 26^r dizi yazılabilir.

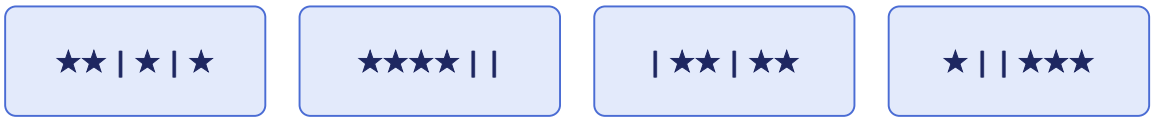
Kaynak: Rosen, Bölüm 6.5, Örnek 1 ve Teorem 1

Elma, portakal ve armut bulunan bir kâseden 4 meyve kaç farklı biçimde seçilebilir?

Yalnızca hangi meyveden kaç tane alındığı önemli. Kâsede her meyveden en az dört tane olduğunu varsayalım.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.5, Örnek 2

Her seçimi yıldızlar ve çubuklarla yazabiliriz



2 elma, 1 portakal, 1 armut | 4 elma | 2 portakal, 2 armut | 1 elma, 3 armut

4 yıldız (meyveler) ve 2 çubuk (türlerin sınırları) var: toplam 6 konum. Seçim, çubukların hangi 2 konumda durduğuyla belirlenir: C(6, 2) = 15.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.5, Örnek 2

Tekrarlı ve sırasız seçim: n türden r nesne, tekrara izin verilerek sırasız olarak C(n + r − 1, r) farklı biçimde seçilir.

r yıldız ve n − 1 çubuk, toplam n + r − 1 konum. Yıldızların konumlarını seçmek yeterli. Meyve örneğinde n = 3, r = 4: C(6, 4) = 15.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.5, Teorem 2

Dört çeşit kurabiye satan bir dükkândan altı kurabiye kaç farklı biçimde alınabilir?

n = 4 tür, r = 6 nesne: C(4 + 6 − 1, 6) = C(9, 6) = 84.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.5, Örnek 4

$x_1 + x_2 + x_3 = 11$ denkleminin negatif olmayan tam sayı çözümleri kaç tanedir?

11 birimi üç değişkene dağıtıyoruz: üç türden 11 nesneyi tekrarlı ve sırasız seçmek. C(3 + 11 − 1, 11) = C(13, 2) = 78.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.5, Örnek 5

SUCCESS sözcüğünün harfleri kaç farklı biçimde dizilebilir?

7 harf var ama üç S ve iki C birbirinin aynısı. 7! dizilişte üç S'nin yer değiştirmesi (3!) ve iki C'nin yer değiştirmesi (2!) aynı sözcüğü verir: 7! / (3! · 2!) = 420.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.5, Örnek 7

Dört durum, dört formül

	Tekrar yok	Tekrar var
Sıra önemli	$P(n, r) = n! / (n - r)!$	n^r
Sıra önemsiz	$C(n, r) = n! / (r! (n - r)!)$	$C(n + r - 1, r)$

n türden ya da n nesneden r tanesini seçerken sorulacak iki soru: sıra önemli mi, tekrar var mı?

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.5, Tablo 1

6. BÖLÜM · BİNOM VE TEKRARLI SEÇİMLER

Bir sayma sorusunu çözerken izlenecek yol

İş adımlara mı ayrılıyor, durumlara mı?	*Adımlar: çarp. Durumlar: topla.*
Bir şey iki kez sayılıyor mu?	*Çıkar ya da böl.*
Seçimde sıra önemli mi?	*Permütasyon mu, kombinasyon mu?*
Aynı nesne tekrar seçilebiliyor mu?	*Tablodaki doğru hücre*

Küçük bir örnekte bütün olasılıkları yazıp sayarak sonucunuzu kontrol edin.

105

ARA SINAVA HAZIRLIK

Kendinizi Sınayın

Yedi soru; her birinin ardından cevabı geliyor

KENDİNİZİ SINAYIN

SORU 1

Altı haneli bir sayısal şifrede en az bir tane 0 bulunmalı. Kaç farklı şifre vardır?

Rakamlar tekrar edebilir ve şifre 0 ile başlayabilir.

KENDİNİZİ SINAYIN

Cevap 1

Bütün altı haneli diziler: $10^6 = 1\,000\,000$	*Çarpma kuralı*
↓	
Hiç 0 içermeyenler: $9^6 = 531\,441$	*Her hane için 9 seçenek*
↓	
$1\,000\,000 - 531\,441 = 468\,559$	*Hepsinden "hiç" olanları çıkar*

468 559 şifre.

KENDİNİZİ SINAYIN

SORU 2

Harf notları AA, BA, BB, CB, CC, DC, DD ve FF olan bir derste, en az beş öğrencinin aynı harf notunu aldığını garanti etmek için en az kaç öğrenci gerekir?

Kaynak: Ufuk Üniversitesi Önlisans ve Lisans Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği, Madde 42

KENDİNİZİ SINAYIN

CEVAP 2

$8 \cdot 4 + 1 = 33$ öğrenci.

8 kutu, her kutuda en fazla 4 öğrenci olursa toplam 32 öğrenci eder. 33. öğrenci bir kutuyu 5'e çıkarır: $k(r - 1) + 1$.

Kaynak: Ufuk Üniversitesi Önlisans ve Lisans Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği, Madde 42

KENDİNİZİ SINAYIN

SORU 3

30 kişilik bir sınıfta (a) bir sınıf temsilcisi ve bir yardımcısı, (b) üç kişilik bir proje grubu kaç farklı biçimde seçilir?

Önce sıranın önemli olup olmadığına karar verin.

KENDİNİZİ SINAYIN

Cevap 3

Seçim	Sıra önemli mi?	Sayı
(a) Temsilci ve yardımcısı	Evet: görevler farklı	$P(30, 2) = 30 \cdot 29 = 870$
(b) Üç kişilik proje grubu	Hayır: herkes aynı grupta	$C(30, 3) = 4060$

Aynı 30 kişi, iki farklı soru: sıranın önemi cevabı değiştiriyor.

KENDİNİZİ SINAYIN

SORU 4

8 bitlik dizilerden kaç tanesinde tam olarak üç tane 1 vardır?

KENDİNİZİ SINAYIN

CEVAP 4

C(8, 3) = 56.

Sekiz konumdan 1'lerin duracağı üç konumu seçiyoruz.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.3, Örnek 14

KENDİNİZİ SINAYIN

SORU 5

ADANA sözcüğünün harfleri kaç farklı biçimde dizilebilir?

KENDİNİZİ SINAYIN

CEVAP 5

5! / 3! = 20.

Beş harfin üçü A. Üç A'nın kendi aralarında yer değiştirmesi (3! = 6 biçim) aynı sözcüğü verir: 120 / 6 = 20.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.5, Teorem 3

KENDİNİZİ SINAYIN

SORU 6

$(x + y)^7$ açılımında x^2y^5 teriminin katsayısı nedir?

KENDİNİZİ SINAYIN

CEVAP 6

C(7, 5) = 21.

Yedi parantezin beşinden y seçilir. C(7, 5) = C(7, 2) olduğundan iki yoldan da 21 çıkar.

Kaynak: Rosen, Bölüm 6.4, Teorem 1

KENDİNİZİ SINAYIN

SORU 7

Şans Topu'nda 1–34 arasından 5 sayı ve 1–14 arasından 1 sayı seçilir. Kaç farklı kolon vardır?

Kaynak: Milli Piyango, Çılgın Sayısal Loto ve Şans Topu oyun kuralları

119

KENDİNİZİ SINAYIN

CEVAP 7

C(34, 5) · 14 = 278 256 · 14 = 3 895 584.

İki seçim art arda yapılıyor: çarpma kuralı. Her kümede sıra önemsiz: kombinasyon.

Kaynak: Milli Piyango, Çılgın Sayısal Loto ve Şans Topu oyun kuralları

120

ÖZET

Bugün Neler Öğrendik?

Yedi cümlede bugünkü ders ve açılıştaki sorunun cevabı

ÖZET · 1

Art arda yapılan seçimlerin sayıları çarpılır; birbirini dışlayan seçeneklerin sayıları toplanır.

ÖZET · 2

İki kez sayılanı bir kez çıkarırız; her sonucu d kez sayan bir sayımı d'ye böleriz.

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. “En az bir” koşulu için: hepsinden “hiç” olanları çıkar.

123

ÖZET · 3

N nesne k kutuya konursa, bir kutuda en az ⌈N/k⌉ nesne vardır.

İlke, hangi kutu olduğunu söylemez; yalnızca öyle bir kutunun var olduğunu söyler.

124

ÖZET · 4

Sıra önemliyse permütasyon kullanılır.

P(n, r) = n! / (n − r)!

125

ÖZET · 5

Sıra önemsizse kombinasyon kullanılır.

C(n, r) = n! / (r! (n − r)!) ve C(n, r) = C(n, n − r)

126

ÖZET · 6

C(n, r) sayıları $(x + y)^n$ açılımının katsayılarıdır ve Pascal üçgenini oluşturur.

127

ÖZET · 7

Tekrara izin verilince: sıralı seçimde n^r, sırasız seçimde C(n + r − 1, r).

128

AÇILIŞTAKİ SORUNUN CEVABI

CEVAP

Rakam grubuna bir hane eklemek plaka sayısını yaklaşık 10 katına çıkarır.

Eklenen hane 0'dan 9'a kadar 10 farklı değer alabilir. Çarpma kuralı: her hane plaka sayısını 10 ile çarpar.

Kaynak: Halk TV, "Araç sahipleri dikkat! İstanbul'da plaka sistemi için kritik gelişme" (2026)

KAYNAKLAR VE GELECEK HAFTA

Bu haftanın konularını nereden çalışabilirsiniz?

Ders kitabı
Rosen, Discrete Mathematics and Its Applications: Bölüm 6.1 (sayma kuralları), 6.2 (güvercin yuvası ilkesi), 6.3 (permütasyon ve kombinasyon), 6.4 (binom katsayıları) ve 6.5 (tekrarlı seçimler).

Alıştırma
Her bölümün sonundaki alıştırmalardan çözümü kitabın sonunda verilen tek numaralıları çözün; cevabınızı kitaptakiyle karşılaştırın.

Python ile deneme
itertools modülündeki product, permutations ve combinations ile küçük örnekleri tek tek üretip sayın; math.perm ve math.comb ile karşılaştırın.

Gelecek hafta: Özyinelemeli bağıntılar
Bir sayıyı kendisinden önceki sayılardan hesaplamak. Pascal özdeşliği bunun bir örneğiydi.

Sorularınızı Teams sohbetinden ya da kanaldan iletebilirsiniz.